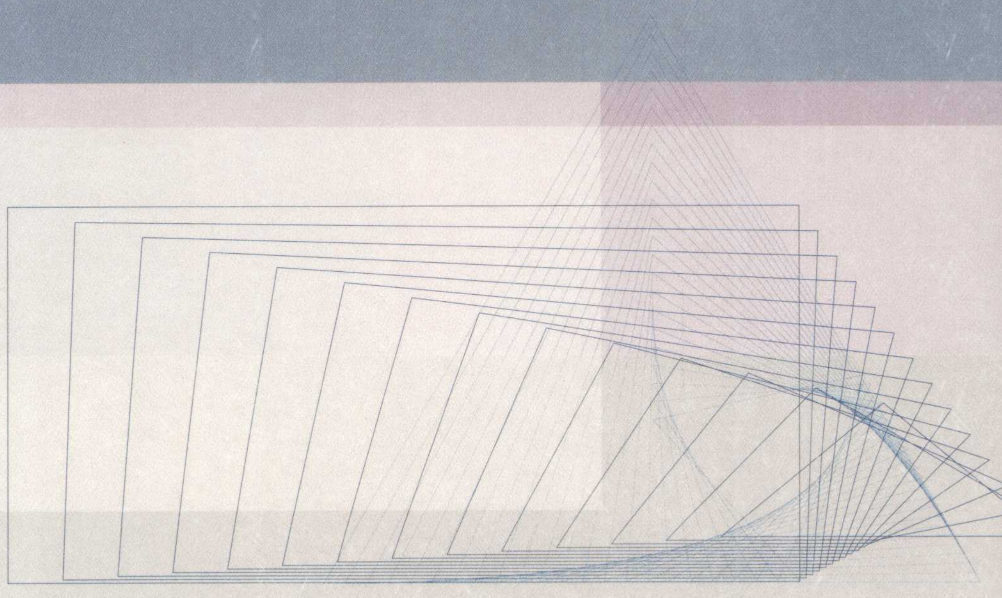
变分法及其应用

物理、力学、工程中的经典建模

欧斐君　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

013024100

0176
24

变分法及其应用

物理、力学、工程中的经典建模

欧斐君　编著

北京航空航天大学
藏书
图书馆

BIANFENFA JIQI YINGYONG

0176
24

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

北航　　C1630869

01302410D

内容提要

变分法是研究泛函极值问题的一门科学，是古典数学的一个分支。

本书共分六章。第一章介绍泛函分析的一些基本概念和符号；第二章、第三章提出四个古典的变分模型，讨论泛函取得极值的必要条件、各种形式的欧拉方程、条件变分、一阶变分的一般形式、自然边界条件、变动边界与横截条件；第四章介绍物理学、力学中的变分原理，二次泛函极小与特征值的关系，正定算子的极小泛函；第五章介绍变分学中的直接方法；第六章介绍极值的充分条件。

本书可作为应用数学、应用物理及应用力学等专业本科生、研究生的教材，也可作为科技工作者的参考书。

北京航空航天大学 藏书

图书在版编目（CIP）数据

变分法及其应用：物理、力学、工程中的经典建模/欧斐君编著. --北京：高等教育出版社，2013.2
ISBN 978-7-04-036556-6

Ⅰ.①变… Ⅱ.①欧… Ⅲ.①变分法-高等教育-教材 Ⅳ.①O176

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 303573 号

策划编辑 兰莹莹　　责任编辑 田 玲　　封面设计 王 雎　　版式设计 王艳红
插图绘制 黄建英　　责任校对 刘丽娴　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	北京鑫丰华彩印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	13	版　次	2013年2月第1版
字　数	240 千字	印　次	2013年2月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	22.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 36556-00

序

历史上很早就有人发现，自然界中有很多现象，例如物体的平衡和运动过程的稳定等都可以归结为某种极值模型。微积分产生后，对这类问题的研究就形成了一门新的学科——变分法。

由于极值模型得到日益广泛的应用，并且人们发现它和数学中另一个重要的分支——微分方程有极为深刻的联系，所以在 20 世纪它成为一些大学的选修课程。

曾受教于知名数学家柯朗(R. Courant)的我国数学教育家朱公谨教授就是在国内最早开设这门课程的先行者之一，本书作者曾亲聆朱先生的讲授。1980 年以后，作者在西安交通大学为理工科学生多次开设变分法选修课，期间还参与并指导了学生的数学建模活动。本书是他在这些工作的基础上，经过多年酝酿和准备才脱稿的，其特色是除了介绍变分法本身的内容外，还结合了古典极值模型的数学建模问题。内容深入浅出，除了古典变分法的基本内容外，还适当介绍了有重要应用的直接方法，因此在应用上及理论上都有一定的广度和深度。

这本教材适合于大学非数学类专业的大学生、研究生的选修课使用。

萧树铁

2012 年 1 月于清华园

前言

20 世纪 80 年代，我开始在西安交通大学给应用数学、应用力学、应用物理专业的学生讲授变分法。与之同时，萧树铁教授在全国高校推广数学建模。是萧先生带我走上数模之路，以后我也把数学建模作为学习、教学与研究的方向。1986 年，我在西安交通大学筹办了“第二期全国数模教师培训班”；1988 年，在南华大学筹办了“全国数学模型教学经验交流会”；1991 年 8 月，又在张家界筹办了“全国数学建模学术会议”。2011 年 12 月 22 日，我作为特邀代表，出席了在北京人民大会堂召开的“全国大学生数学建模竞赛 20 周年庆典暨 2011‘高教社杯’颁奖仪式”，遂激励我把在高校教书到 70 岁的心得写书成册。

在经济建设中，常常会遇到这样一类问题，在一定条件下，怎样设计制造产品，使其用料最省，或成本最低，或投资最小等。在自然现象中，也存在着许多极值规律。例如，光在通过介质的光路时，使其所需时间最小（费马原理）；物体在它所容许的位置中，将自然地处于使其势能为最小的位置（最小势能原理）等。这些都是极值问题。极值问题的研究十分重要，它一直是推动数学、物理、力学发展的主要动力。

变分法是研究极值的重要理论与方法，然而它的研究对象与微分学不一样，变分法是研究泛函的极值。

在自然科学中，变分法的应用极为广泛。一方面，它常用来推导描述自然现象的控制微分方程；另一方面，物理、力学中的多种变分原理的发展，使变分原理本身已成为某些学科理论的组成部分。值得指出的是变分法在计算方法中的应用。20 世纪开创的变分法的直接方法有里茨方法与伽辽金方法等，到 1943 年由柯朗创立、50 年代首先由建筑结构工程师使用的有限元方法，已成为重要的计算方法，而有限元的数学基础是变分法。

本书共分六章。第一章简单介绍泛函分析的基本概念；第二、三章介绍变分法的四个经典模型及基本理论、各种形式的欧拉方程、条件变分、一阶变分的一般形式、自然边界条件、变动边界与横截条件；第四章介绍费马原理、哈密顿原理、最小势能原理、二次泛函的极小与特征值问题的关系、正定算子的极小泛函；第五章介绍变分法的直接方法：里茨方法、伽辽金方法、半解析方法；第六章介绍变分法极值的充分条件。全书各章配有习题，并附有参考答案。

在编写本书时，既注意详细叙述变分法的基本理论，同时也注重变分法的应用。物理、力学、工程中的经典建模，就是用物理、力学中的定律、原理来建模。经典建模现今在航天、建筑、桥梁、动力机械、工程中仍有广泛应用。

本书可作为应用数学、应用物理、应用力学等专业的教材，也可以作为教师、大学生、研究生、科技工作者的参考书。部分章节附有“＊”号，阅读时可以跳过，不会影响对后面的理解。

由于水平有限，不妥之处在所难免，恳请指正。

中国科学技术大学博士生导师徐森林教授评审了本书，非常仔细，并提出了宝贵的意见；在编写本书时，也得到南华大学廖定基教授的帮助。作者在此一并表示感谢！对夫人梁瑞芳副教授的帮助与支持，亦表示敬意。

欧斐君
2012 年 5 月于南华大学

目　录

第一章　预备知识 …… 1

§1.1　n维向量与无穷维向量 …… 1

§1.2　函数空间 …… 3

§1.3　映射、泛函与泛函极值的概念 …… 9

第二章　极值的必要条件——欧拉方程 …… 14

§2.1　经典的变分问题 …… 14

§2.2　欧拉方程 …… 18

§2.3　欧拉方程的积分法与退化情形 …… 22

§2.4　变分的概念及其运算 …… 26

§2.5　含有多个函数的情形 …… 29

§2.6　含有高阶导数的情形 …… 32

§2.7　两个以上的独立变量的情形 …… 34

§2.8　参数表示式 …… 37

§2.9　欧拉方程的不变性 …… 40

第三章　条件变分与变动边界问题 …… 47

§3.1　等周问题 …… 47

§3.2　短程线问题 …… 53

§3.3　微分方程作为附加条件 …… 57

§3.4　自由边界和自然边界条件 …… 59

§3.5　一阶变分的一般形式 …… 65

§3.6　变动边界问题与横截条件 …… 69

§3.7　隐泛函取得极值的必要条件 …… 73

* §3.8　标枪投掷的数学模型 …… 76

第四章　物理学、力学中的变分原理和数学物理中的微分方程 …… 82

§4.1　费马原理 …… 82

§4.2　哈密顿原理 …… 85

* §4.3　正则方程及其雅可比－哈密顿方程 …… 90

§4.4　最小势能原理 …… 101

§4.5　二次泛函的极小问题及其与特征值问题的关系 …… 105

§4.6　正定算子的极小泛函 …… 110
§4.7　泛函的极值与微分方程 …… 114
第五章　变分学中的直接方法 …… 119
§5.1　里茨方法 …… 119
§5.2　伽辽金方法 …… 132
§5.3　化为常微分方程的解法——半解析法 …… 136
§5.4　有限元方法简介 …… 143
第六章　极值的充分条件 …… 149
§6.1　极值问题的分类 …… 149
§6.2　魏尔斯特拉斯函数与勒让德条件 …… 152
§6.3　雅可比条件与共轭点 …… 158
§6.4　极值曲线场与极值曲线的嵌入概念 …… 164
§6.5　希尔伯特积分及充分性定理 …… 168
***附录　关于转子强度的半解析计算法** …… 180
部分习题答案 …… 189
参考文献 …… 198

第一章 预备知识

§1.1 n 维向量与无穷维向量①

变分法是个古老的数学分支. 它所研究的对象,用现在的数学术语来说,是泛函的极值问题,而泛函分析是19世纪初发展起来的一门数学学科,现今已渗入到工程技术、自然科学的许多领域. 因此,在这一章先简略地介绍泛函分析的一些最基本的概念和记号,目的是在后面叙述变分法的理论时采用它们. 在本章中,我们准备采用对比的方法,用大家熟知的 n 维向量来引出无穷维向量,用线性代数的基本概念来介绍泛函分析的基本概念.

把 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 叫做一个 n 维行向量,记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

设无穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty,$$

把这些数所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ 称为一个无穷维行向量,记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots).$$

设 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是另一 n 维行向量.

设 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)$ 是另一个无穷维行向量 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2<\infty\right)$.

约定两个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),$$

差为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n),$$

数 α 乘 n 维向量为

$$\alpha\boldsymbol{A}=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n),$$

约定无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n,\cdots),$$

差为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n,\cdots),$$

数 α 乘无穷维向量为

$$\alpha\boldsymbol{A}=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n,\cdots),$$

---

① 这里仅以行向量为例,对列向量同样成立.

n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 的范数(即模)为

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})},$$

n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的交角的余弦为

$$\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \frac{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})}\sqrt{(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}.$$

若两个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$,则称向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交.

n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的全体称为 n 维向量空间 V_n,

$$V_n = \left\{ \boldsymbol{X} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right\},$$

其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集合.

无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i,$$

无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 的范数(即模)为

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} = \sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})},$$

无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 交角的余弦为

$$\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \frac{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})}\sqrt{(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}}.$$

若两个无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$,则称向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交.

无穷维向量 $\boldsymbol{X}$ 的全体称为无穷维向量空间 l^2,

$$l^2 = \left\{ \boldsymbol{X} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n, \cdots), \\ x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \end{array} \right\}.$$

我们用形式逻辑的办法把 n 维行向量推广到无穷维向量时,条件 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ 起了重要的作用,它保证了无穷维向量的范数有意义. 根据柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right),$$

不难说明这样定义的内积也有意义. 如果把柯西不等式改写为

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}} \leqslant 1,$$

注意到内积与范数的定义，可知这样定义的两个无穷维向量交角的余弦是合理的.

希尔伯特(Hilbert)在研究积分方程时最先引入 l^2 空间，很多理论问题与实际问题都可以归结到对 l^2 空间的研究.

§1.2 函数空间

设 $f(t)$ 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，取分点

$$t_i = a + i\Delta t \quad (i = 1,2,\cdots, n),$$

$\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$，依次用 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 表示函数 $f(t)$ 在这些分点上的函数值，把 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 当作 n 维空间的向量 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的分量，这样一来函数 $f(t)$ 就对应于向量 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$，令 $n \to \infty$ 时，$f(t)$ 就对应着一个无穷维向量. 因此，我们把函数 $f(t)$ 看作一个向量，它的分量就是 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的函数值，仍然用 $f(t)$ 表示.

我们知道，n 维空间 V_n 的两个向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$，无穷维空间 l^2 的两向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$. 对于连续变量，积分起着求和的作用. 因此，定义在 $[a,b]$ 上的两个函数(向量) $x(t)$ 与 $y(t)$ 的内积为

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\text{①}, \tag{2.1}$$

显然，内积满足以下性质：

(1) $(x,y) = (y,x)$;

(2) $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$;

(3) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$;

(4) $(x,x) > 0$，当 $x \neq 0$ 时；$(x,x) = 0$，当 $x \equiv 0$ 时.

类似地，定义函数 $x(t)$ 的范数(函数“长度”概念的抽象)为

$$\| x(t) \| = \sqrt{(x,x)} = \left\{ \int_a^b x(t)x(t)\,\mathrm{d}t \right\}^{1/2}. \tag{2.2}$$

非零连续函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 间的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\| x(t) \| \; \| y(t) \|}$$

---

① 要求某种意义下的积分有意义，例如黎曼(Riemann)意义下的积分或勒贝格(Lebesgue)意义下的积分.

$$= \frac{\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t}{\left\{\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}}. \tag{2.3}$$

若函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 满足条件

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{2.4}$$

则称函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 正交.

两个 n 维向量 $\boldsymbol{A} = (a_1,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_1,\cdots,b_n)$ 之间的距离为

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|\\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}\\ &= \sqrt{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})}.\end{aligned}$$

两个函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离规定为它们之差的范数,即

$$\begin{aligned}&\|x(t)-y(t)\|\\ &= \sqrt{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\mathrm{d}t}\\ &= \sqrt{(x-y,x-y)}.\end{aligned}$$

函数的范数可以用不同的方法来定义,就像长度有不同的单位一样. 例如,在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $x(t)$ 的范数还可以定义为

$$\|x(t)\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|, \tag{2.5}$$

两个连续函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离定义为

$$\|x(t)-y(t)\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

在变分中范数的定义常用(2.5).

上节提到的 n 维向量空间 V_n 和无穷维向量空间 l^2,以及线性代数里讲过的线性空间、欧氏空间等,都是抽象的概念,而所谓"空间"是泛指具有某种数学运算结构的向量集合. 具有不同性质的函数集合,构成不同的函数空间.

在 $[a,b]$ 上连续函数的全体构成函数空间 $C_{[a,b]}$,即

$$C_{[a,b]} = \{x(t)\mid x(t)\text{ 在 }a\leqslant t\leqslant b\text{ 上连续}\};$$

在 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数的全体构成函数空间 $C_{[a,b]}^{(k)}$,这里 k 是正整数,即

$$C_{[a,b]}^{(k)} = \{x(t)\mid x(t)\text{ 在}[a,b]\text{ 上具有 }k\text{ 阶连续导数}\};$$

在勒贝格积分意义①下，由在区间$[a,b]$上平方可积的函数全体构成函数空间 $L^2_{[a,b]}$，即

$$L^2_{[a,b]} = \left\{ x(t) \,\middle|\, \int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

有了距离的概念，我们就可以引入极限、收敛等概念了. 设有函数序列 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), \cdots$ 及函数 $x(t)$，如果满足条件

$$\lim_{n\to\infty} \| x(t) - x_n(t) \| = 0,$$

则称函数序列 $x_n(t)\,(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 $x(t)$. 因为距离有不同的定义，故相应的收敛就有不同的名称，在(2.2)的意义下有

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_a^b [x(t) - x_n(t)]^2 \mathrm{d}t \right\}^{1/2} = 0$$

成立，称函数 $x_n(t)\,(n=1,2,\cdots)$ 2 次幂平均收敛于 $x(t)$；而在(2.5)的意义下，有

$$\lim_{n\to\infty} \{ \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) - x_n(t) | \} = 0$$

成立，这就是函数序列 $x_n(t)\,(n=1,2,\cdots)$ 一致收敛于 $x(t)$. 从在有界区域上的一致收敛可以推出平均收敛，反之则不真.

对于向量组 $\boldsymbol{A}_k = (a_{k1}, \cdots, a_{kn})\,(k=1,2,\cdots,m)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得

$$c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{A}_m = 0 \tag{2.6$'$}$$

成立，就称向量组线性相关.

如果向量组 $\boldsymbol{A}_k\,(k=1,2,\cdots,m)$ 非线性相关，就称为线性无关. 换句话说，只有在 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 时(2.6)′式才成立，那么称向量组 $\boldsymbol{A}_k\,(k=1,2,\cdots,m)$ 线性无关.

范数为 1 的向量称为单位向量.

设有向量组

$$\boldsymbol{e}_i\,(i=1,2,\cdots,m), \tag{2.7$'$}$$

对于函数组 $x_1(t), \cdots, x_m(t)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_mx_m(t) = 0 \tag{2.6}$$

成立，就称函数组线性相关.

如果函数 $x_k(t)\,(k=1,2,\cdots,m)$ 非线性相关，就称为线性无关. 换句话说，只有在 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 时(2.6)式才成立，那么称函数组 $x_k(t)\,(k=1,2,\cdots,m)$ 线性无关.

范数为 1 的函数 $x(t)$ 称为规范函数.

设有函数系

$$\varphi_i(t)\,(i=1,2,\cdots,m,\cdots), \tag{2.7}$$

① 微积分所讲的积分叫黎曼积分，而勒贝格积分是黎曼积分的推广. 实变函数中证明：若函数在黎曼意义下可积，则函数也在勒贝格意义下可积，而且积分值相等. 详见任何一本实变函数的书籍.

如果向量组中任意两向量满足

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_k) = 0,\ i \neq k,$$
$$i,k = 1,2,\cdots,m, \tag{2.8}'$$

则称该向量组为正交向量组. 如果向量组 $\boldsymbol{e}_i$ ($i = 1,2,\cdots,m$) 不仅满足 (2.8)′, 还满足 $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ ($i = 1,2,\cdots,m$), 则称 (2.7)′ 为正交规范向量组.

如果这个函数系中任意两函数满足

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t = 0, i \neq j,$$
$$i,j = 1,2,\cdots,m,\cdots, \tag{2.8}$$

则称该函数系为正交函数系. 如果函数系 $\varphi_i(t)$ ($i = 1,2,\cdots,m,\cdots$) 不仅满足 (2.8), 还满足

$$\int_a^b \varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}t = 1(\ \|\varphi_i\| = 1),$$
$$i = 1,2,\cdots,m,\cdots,$$

则称 (2.7) 为正交规范函数系.

正交函数系有很多, 例如:

(1) 三角函数系

$$1,\quad \cos t,\quad \sin t,\quad \cos 2t,\quad \sin 2t,\quad \cdots,\quad \cos nt,\quad \sin nt,\quad \cdots \tag{2.9}$$

是在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交函数系.

容易验证

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \cdots,$$
$$\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\quad \cdots \tag{2.9}'$$

是在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交规范函数系.

(2) 勒让德 (Legendre) 多项式

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n}\quad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{2.10}$$

它的开头若干个多项式是

$$P_0(t) = 1,\quad P_1(t) = t,\quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1),$$
$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t),\cdots.$$

不难证明, (2.10) 是在 $[-1,1]$ 上的正交函数系.

设有 n 维单位正交向量组

$$e_k(k = 1,2,\cdots,n), \quad (2.11)'$$

则任意 n 维向量 X 可表示为

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad (2.12)'$$

其中

$$x_k = (X,e_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n) \quad (2.13)'$$

为向量 X 在 e_k 上的投影,我们称向量组(2.11)′为坐标向量,称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为向量 X 关于坐标向量组(2.11)′的坐标.

设有在闭区间$[a,b]$上给出的完备正交规范函数系("完备"概念下面将会提到)

$$\varphi_i(t) \ (i = 1,2,\cdots,n,\cdots), \quad (2.11)$$

函数 $x(t)$ 可以展成广义傅里叶(Fourier)级数

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t), \quad (2.12)$$

其中傅里叶系数

$$c_k = (x,\varphi_k) = \int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,dt \quad (k = 1,2,\cdots). \quad (2.13)$$

称函数系(2.11)为坐标函数,称 $c_k(k=1,2,\cdots)$为函数 $x(t)$ 关于坐标函数系(2.11)的坐标.

对于广义傅里叶级数,我们从两方面作进一步的说明,即怎样判定正交函数系的完备性?完备性对于把函数展成广义傅里叶级数有什么意义?

设给定了 m 个在$[a,b]$上互相正交的规范函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 和函数 $x(t)$,它们都是平方可积的函数,欲求常数 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_m$ 使线性组合 $\bar{c}_1\varphi_1(t)+\bar{c}_2\varphi_2(t)+\cdots+\bar{c}_m\varphi_k(t)$ 与 $x(t)$ 的平均平方偏差 I_m 最小. 我们断言:所求常数 $\bar{c}_k$ 应该等于函数 $x(t)$ 关于 $\varphi_k(t)$ 的傅里叶系数,即

$$\bar{c}_k = c_k = (x,\varphi_k) = \int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,dt.$$

事实上,

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_a^b [x(t) - \bar{c}_1\varphi_1 - \cdots - \bar{c}_m\varphi_m(t)]^2\,dt \\
&= \int_a^b x^2(t)\,dt - 2\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_k\int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,dt + \\
&\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\bar{c}_i\bar{c}_j\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt \\
&= \int_a^b x^2(t)\,dt - 2\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_k c_k + \sum_{k=1}^{m}\bar{c}_k^{\,2} \\
&= \int_a^b x^2(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}(c_k - \bar{c}_k)^2 - \sum_{k=1}^{m}c_k^2,
\end{aligned}$$

可见，当 $\bar{c}_k = c_k(k=1,2,\cdots,m)$ 时，I_m 达到最小值

$$\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

由于 I_m 是个非负的数，如果 $\bar{c}_k = c_k(k=1,2,\cdots,m)$，则恒有

$$I_m = \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \geqslant 0,$$

即有

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.14}$$

成立. 因为这个不等式对任意的 m 都成立，故当 m 趋于无穷大时，仍有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.14$'$}$$

成立，称(2.14)′为贝塞尔(Bessel)不等式.

在一个闭区间 $[a,b]$ 上有正交规范函数系

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\quad \cdots,\quad \varphi_n(t),\quad \cdots, \tag{2.15}$$

如果对于任何在 $[a,b]$ 上平方可积的函数 $x(t)$，帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\|x\|^2 = \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{2.16}$$

恒成立，我们说序列(2.15)是完备的，而等式(2.16)叫封闭性方程，它是勾股定理在函数空间的推广.

还有一种判定函数系(2.15)完备的等价方法是：如果任意函数 $\Phi(t)$ 与所有函数 $\varphi_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 都正交，即若

$$\int_a^b \varphi_n(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = 0,\quad n = 1,2,\cdots,$$

可推出 $\Phi_n \doteq 0$(Φ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为0)，则函数系(2.15)就是完备的，否则它就是不完备的.

可以证明三角函数系(2.9)、(2.9)′以及勒让德多项式(2.10)等都是完备的.

不完备的正交函数系很容易举出，例如三角函数系

$$1,\quad \cos t\quad \cos 2t,\quad \sin 2t,\quad \cdots,\quad \cos nt,\quad \sin nt,\quad \cdots, \tag{2.17}$$

它是由(2.9)去掉一个函数 $\sin t$ 得到的，显然，它仍是在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交系，但是不完备. 因为存在函数 $\Phi(t) = \sin t \neq 0$，它与三角函数系(2.17)的所有函数都正交.

正交函数系的完备性，对保证广义傅里叶级数收敛于被展开的函数有着决定性的意义. 一般说来，当正交规范函数系(2.15)和 $x(t)$ 给出后，不管(2.15)完备与否，都可以计算系数

$$c_k = (x,\varphi_k) = \int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t \quad (k=1,2,\cdots),$$

作出和式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t). \tag{2.18}$$

这时我们只能说(2.18)式对应着 $x(t)$,即

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t),$$

可以证明:当(2.15)是完备的,对于满足狄利克雷(Dirichlet)条件的 $x(t)$,在其连续点处,均有

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t) \tag{2.19}$$

成立,即广义傅里叶级数收敛于 $x(t)$.

正交规范的条件可以减弱,当 $\varphi_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是完备的正交系或完备的独立的函数系时,展开式(2.19)仍然成立,只是计算展开系数 c_k 的公式不同而已.

§1.3 映射、泛函与泛函极值的概念

1. 映射的概念

设有 A,B 两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 b 和它对应,那么包括集合 A,B 以及 A 到 B 的对应法则就叫做从集合 A 到集合 B 的映射或映象. 记

$$f: A \to B \quad (\text{或 } A \xrightarrow{f} B),$$

而集合 B 中的元素 b,称为集合 A 中的元素 a 在映射 f 下的象.

例如:

(1) 函数 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 可视为由集合 $A=\{x\mid x\in[-r,r]\}$ 到集合 $B=\{y\mid y\in[0,r]\}$ 的一个映射.

(2) 定义在 G 上的二元函数 $z=f(x,y)$,可视为由定义域 G 到函数值域 B 的一个映射.

(3) 设有集合 $C^{(1)}_{[a,b]}$ 和 $C_{[a,b]}$,对应法则是求一阶导数. 对于任意 $x(t)\in C^{(1)}_{[a,b]}$,求导后得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x'(t)\in C_{[a,b]}$. 这样我们就给出了从 $C^{(1)}_{[a,b]}$ 到 $C_{[a,b]}$ 的映射,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: C^{(1)}_{[a,\,b]} \longrightarrow C_{[a,\,b]}.$$

(4) A 是在 xOy 平面中的闭域 $\overline{G}$ 上所有一阶偏导数连续的函数集合，即

$$A = \{z(x,y) \mid z(x,y) \text{ 在 } \overline{G} \text{ 上一阶偏导数连续}\},$$

积分

$$J[z(\cdot,\cdot)] = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

给出了一个映射，它把定义在 $\overline{G}$ 上的光滑曲面的集合，映射为曲面面积的集合.

2. 泛函的概念

我们称函数集合到实数域的映射为泛函. 泛函的定义也可以是：设有函数集合 A，如果对于每一个元素 $\varphi(x) \in A$，有某一数与之对应，则称为泛函，记作 $I[\varphi(\cdot)]$.

泛函是个新概念，但是我们早就接触过许多泛函，如上段的例(4)就是一个泛函. 下面再举几个例子.

(1) $I[f(\cdot)] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个泛函，它把函数集合 $C_{[a,b]}$ 映射为实数.

(2) 傅里叶系数

$$a_n = I[f(\cdot)] = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x,$$

$$b_n = J[f(\cdot)] = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$

都是泛函，它们把满足狄利克雷条件、以 $2L$ 为周期的函数映射为实数.

(3) $I[y(\cdot)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$ 是一个泛函，它把定义在 $[a,b]$ 区间上的可求长曲线映射为正数 —— 曲线的弧长.

(4) 一根梁在弯矩作用下产生弯曲变形，在小挠度的情况下，弯曲势能为

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI[y''(x)]^2\mathrm{d}x,$$

其中 E 为梁的弹性系数，I 为梁的横断面的惯性矩，$y(x)$ 为挠度曲线，势能 V 是挠度曲线 $y(x)$ 的一个泛函.

(5) 一条质量均匀分布的弦，长度为 L，两端固定，受不变张力 K 的作用，弦在稳定平衡位置邻近作微小的横振动，振动弦的动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho u_t^2\,\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为弦的线密度，$u(x,t)$ 是形变位移函数. 动能 T 是 $u(x,t)$ 的泛函.

(6) $J[\varphi(\cdot)] = \iint\limits_B K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_a^b [\varphi(s)]^2\mathrm{d}s - 2\int_a^b \varphi(s)f(s)\mathrm{d}s$,

其中，$B = \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{l} a \leqslant s \leqslant b \\ a \leqslant t \leqslant b \end{array} \right\}$，$K(s,t) \in C_B$ 和 $f(s) \in C_{[a,b]}$ 为给定的已知函数，$J[\varphi(\cdot)]$ 为 $\varphi(s) \in C_{[a,b]}$ 的泛函.

3. 算子的概念

称由函数集合到函数集合的映射为算子，上段第 1 部分例(3)中的映射是一个算子——微分算子. 再举几个例子.

(1) 设 $y(x) \in C^{(2)}$，

$$L[y] = y'' + y,$$

$L[\quad]$ 是一个微分算子.

(2)
$$L[y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y'] - q(x)y,$$

$L[\quad]$ 是一个一般的二阶微分算子. 这里设 $p(x) \in C^{(1)}$，$y(x) \in C^{(2)}$，$q(x) \in C$.

(3)
$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Δ_2 是一个二阶微分算子，通常称为二维的拉普拉斯(Laplace)算子.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

Δ 是三维拉普拉斯算子.

(4)
$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

∇ 是一个向量微分算子，称为梯度算子，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$.

4. 极值问题的集合表示

借助于集合的记号，我们可以简洁地表示各种类型的极值问题.

例如，求定义在闭区间 I 上的连续函数 $f(x)$ 的最小或最大问题表示为：求 $x_0 \in I$，使

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x),$$

或求 $x_1 \in I$，使

$$f(x_1) = \max_{x \in I} f(x).$$

类似地，可把求多元函数在闭区域$\overline{\Omega}$上的最小或最大问题表示为：求点$M(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\overline{\Omega}$，使得

$$f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\min_{M\in\overline{\Omega}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

或

$$f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\max_{M\in\overline{\Omega}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

又设$J[y(\cdot)]$是定义在$C_I^{(k)}$上的泛函，求泛函$J[y(\cdot)]$的最小或最大问题，即是求$Y(x)\in C_I^{(k)}$，使得

$$J[Y(\cdot)]=\min_{y(x)\in C_I^{(k)}}J[y(\cdot)],$$

或

$$J[Y(\cdot)]=\max_{y(x)\in C_I^{(k)}}J[y(\cdot)].$$

所谓变分问题就是研究、寻求泛函的极值问题.

5. 泛函极值的概念

我们知道，泛函$J[y(\cdot)]$是定义在域I上具有某种性质的函数集合到数集的一个映射，A为泛函$J[y(\cdot)]$的可取函数集合. 如果存在函数$Y=Y(x)\in A$，对于任一$y(x)\in A$，使得

$$J[Y(\cdot)]\leqslant J[y(\cdot)]\tag{3.1}$$

恒成立，则称$J[Y(\cdot)]$是泛函$J[y(\cdot)]$的最小值，$Y(x)$是它的最小函数.

和函数一样，泛函$J[y(\cdot)]$的极小，乃是指它在$Y(x)$的适当邻近的可取函数的范围内成为最小. 关于邻近可以有不同的解释，例如，给出某个正数δ，把满足

$$|y(x)-Y(x)|<\delta,\quad x\in I$$

的可取函数$y(x)$的全体定义为$Y(x)$的一个邻近.

由以上的定义可见，极值是在局部范围内的最值，它是个局部概念，而最值是个全局概念.

习 题 一

1. 求函数$y=x-x^2$，$x\in[0,2]$的范数$\|y\|$.

2. 设$x(t)=\sin t$，$y(t)=\cos t$，$t\in[0,2\pi]$，求它们之间的距离.

3. 证明内积具有以下性质：

(1) $(cx,y)=c(x,y)$;

(2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

(3) $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$,

其中 c 为常数，$x,y,z\in C_{[a,b]}$.

4. 什么叫泛函？试列举几个泛函的例子.

5. 求泛函

$$I[y(\cdot)]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

关于(1) $y=x$;(2) $y=\mathrm{ch}\,x$ 的值.

6. 设有泛函为

$$I[y(\cdot)]=\int_{-1}^1 x^2y'^2\,\mathrm{d}x,$$

又有一函数为

$$y_a(x)=\frac{\arctan\dfrac{x}{a}}{\arctan\dfrac{1}{a}},$$

其中，a 为不等于零的数. 证明：

$$I[y_a(\cdot)]<\frac{2a}{\arctan\dfrac{1}{a}}.$$

7. 设泛函

$$I[y(\cdot)]=\int_0^1(x^2y'^2+xy^2+2xy)\,\mathrm{d}x,$$

可取函数的集合是满足关系：$y(0)=0,y'(1)=0$ 的所有二次函数.

(1) 证明：可取函数的集合可表示为 $y=ax^2-2ax$，这里 $a\neq0,a\in\mathbf{R}$;

(2) 问 a 为何值时，$I[y(\cdot)]$取得最小值？

第二章　极值的必要条件——欧拉方程

§2.1　经典的变分问题

为了使读者弄清楚变分法所研究的问题的特点，以及更好地理解变分的命题，我们先从历史上的经典变分问题讲起.

1. 最速降线的数学模型

有不在同一铅垂线上高低不同的两点 M_1 与 M_2，在所有连接这两点光滑曲线中，求一条曲线，使得小球沿此曲线轨道，无初速地从 M_1 滑行到 M_2，所需时间最短. 这就是著名的最速降线问题.

由于考察的是小球，不妨设为质点；轨道很细，设为曲线；又轨道光滑，可假设质点下滑时没有摩擦阻力的作用.

显然，这样的最速降线应该在过 M_1 及 M_2 的铅垂平面里，在此平面内，取 M_1 作原点，x 轴指向水平方面，y 轴垂直向下（见图 2.1.1）. 假设任取一条过 $M_1(0,0)$，$M_2(x_2,y_2)$ 的光滑曲线，其方程为

$$y = y(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant x_2), \qquad (1.1)$$

它应满足条件

$$y(0) = 0, \quad y(x_2) = y_2. \qquad (1.2)$$

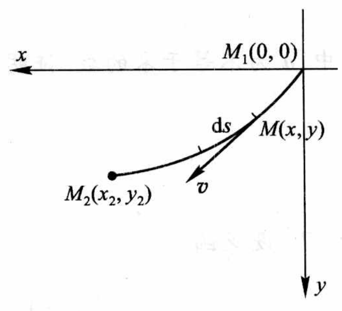


图 2.1.1

如果在曲线上任意取一点 $M(x,y)$，根据能量守恒定律，质点在 M 点的运动速度 v 与这点的 y 坐标有关系式

$$\frac{1}{2}v^2 = gy$$

或

$$v = \sqrt{2gy},$$

其中 g 为重力加速度. 质点经过弦 ds 所需时间为

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx,$$

因此,质点沿此曲线从 M_1 滑行到 M_2 所需的时间为

$$T[y(\cdot)] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx. \tag{1.3}$$

(1.3)式给出了一个具体的泛函 $T[y(\cdot)]$,它把所有可能连接 M_1 与 M_2 的平面光滑曲线的集合映射为时间——实数的集合.如果从这个曲线集合中任取一条曲线 $y(x)$,(1.3)给出质点沿着它滑下的时间 T,时间 T 依赖于曲线 $y(x)$ 的选取,从这个曲线集合中,选出使 T 为最小值的那一条就是最速降线.这样的曲线的集合叫可取曲线集合,记作 A,

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x) \in C^{(1)}_{[0,x_2]} \\ y(0)=0, y(x_2)=y_2 \end{array} \right\}.$$

求最速降线归结为求泛函 $T[y(\cdot)]$的最小问题,即求 $Y(x)\in A$,使

$$T[Y(\cdot)] = \min_{y(x)\in A} T[y(x)],$$

或使

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx = \min.$$

早在 1630 年,伽利略(Galileo)做过实验:在铅垂平面内,他取同样两个小球,其中一个沿圆弧从 M_1 滑行到 M_2,另一个沿 M_1 到 M_2 间的直线段滑行,结果是沿圆弧的球先到,他认为最速降线是圆弧段.1696 年,约翰·伯努利(Johann Bernoulli)又研究过此问题,并以公开的形式在《教师学报》上提出,曾引起广泛注意.这个问题的正确解答是摆线,不是圆弧段,人们认为这是变分学研究的开始.

2. 极小曲面问题的模型

设在 xOy 坐标面上有两点 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2)$.在连接 M_1 与 M_2 的曲线中,求它绕 x 轴旋转所得的曲面面积为最小的那一条.这就是极小曲面问题.

设任一过 M_1 与 M_2 的可求长曲线方程为

$$y = y(x) \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2), \tag{1.4}$$

它满足条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{1.5}$$

绕 x 轴旋转一周后,这曲线转成一个旋转曲面(图 2.1.2),该曲面的面积为

$$S[y(\cdot)] = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

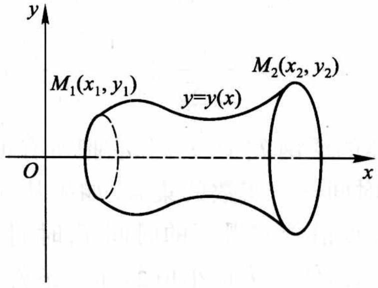


图 2.1.2

$S[y(\cdot)]$是一个泛函,它的值依赖于函数 $y=y(x)$ 的选择. 极小曲面的问题是:在所有满足条件(1.5)的函数(1.4)中,即在可取曲线的集合

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x) \in C^{(1)}_{[x_1,x_2]} \\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \end{array} \right\}$$

中,求 $y=Y(x)\in A$,使

$$S[Y(\cdot)] = \min_{y(x)\in A} S[y(x)],$$

即使

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2} y(x)\ \sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x = \min.$$

3. 短程线问题的模型

已知光滑曲面 S: $G(x,y,z)=0$ 和位于该曲面上的两点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2, y_2,z_2)$,在曲面 S 上连接 A,B 的可求长的曲线无穷多,对应任一条可求长的曲线都有相应的弧长,请求出曲线,使得它的弧长最短. 这就是短程线问题. 如图 2.1.3.

设在曲面 S 上连接 A,B 的一阶光滑曲线是

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases} \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2), \tag{1.7}$$

且它满足条件

$$G(x,y(x),z(x)) = 0. \tag{1.8}$$

$\overset{\frown}{AB}$的弧长为

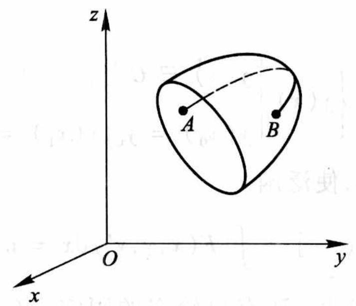


图 2.1.3

$$L[y(\cdot),z(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \min. \tag{1.9}$$

于是,我们的变分命题可以叙述为:

在曲面(1.8)上,从一切过 A,B 两点的一阶光滑曲线(1.7)中选取一条,使泛函 $L[y(\cdot),z(\cdot)]$(1.9)为最小.

4. 等周问题模型

这类问题中最简单的情况是:求一条长度一定的闭曲线,使其所围成的面积最大.

设所求的曲线用参数形式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{1.10}$$

给出.由于要求曲线是闭的,所以有

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2). \tag{1.11}$$

此外,还应满足等周条件

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t, \tag{1.12}$$

其中 L 为常数,闭曲线(1.10)所围成的面积

$$S[x(\cdot),y(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

为最大.于是,等周问题可以叙述为:在满足闭曲线条件(1.11)和等周条件(1.12)的前提下,从一切形如 $x=x(t),y=y(t)$ 的函数中,选出一对函数 $x=X(t),y=Y(t)$,使得泛函 $S[x(\cdot),y(\cdot)]$ 取得最大值 $S[X(\cdot),Y(\cdot)]$.

这几个问题都是历史上有名的变分问题.除此之外,还有费马(Fermat)原理等其他古典变分问题,在此不一一列举.问题 1,2 是最简单的变分问题,可以抽

象为在可取函数集合

$$A = \left\{ y(x) \middle| \begin{array}{l} y(x) \in C^{(1)}_{[x_0,x_1]} \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{array} \right\}$$

中,求一个函数 $Y(x) \in A$,使泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x = \min.$$

可取函数集合在几何上代表：所有以给定的固定点(x_0,y_0)和(x_1,y_1)为端点，且能表示为 $y = y(x)$的足够光滑的曲线集合.

问题 3,4 是条件变分,它们的一般叙述将在以后再讲. 通过这几个古典变分问题的提法,可以看到变分法研究的问题是泛函的极值问题.

§2.2 欧拉方程

根据费马定理,一个可微函数$f(x)$在某一点 x_0 具有极值的必要条件是:它的微分在这点等于零,即

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x = 0,$$

或者

$$f'(x_0) = 0.$$

究竟$f(x)$在 x_0 是否取得极值？是极大还是极小？这些可以根据问题的物理意义或几何意义来决定,当然也可以通过进一步的数学条件来判定. 本节的主要目的是对简单的变分问题建立与函数极值类似的必要条件,即给出简单泛函取得极小的必要条件. 为此,我们先证明以下引理.

变分学的基本引理 设函数$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,$\eta(x)$是在$[x_1,x_2]$上适当高阶可微的任意函数,且它满足边界条件

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

如果恒有

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.1}$$

成立,则必有

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in [x_1,x_2].$$

证明 用反证法. 设$f(x)$在 $x = x_0 \in (x_1,x_2)$处不等于零,例如$f(x_0) > 0$,则依连续性,在 x_0 的适当近旁有$f(x) > 0$,不妨设此近旁为 $\bar{x}_1 < x_0 < \bar{x}_2$,当 $x \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$时有

$$f(x) > 0.$$

因为 $\eta(x)$ 为任意函数，现将其取作

$$\eta(x) = \begin{cases} K(x-\bar{x}_1)^{2n}(x-\bar{x}_2)^{2n}, & x \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2], \\ 0, & x \in [x_1, \bar{x}_1], x \in [\bar{x}_2, x_2], \end{cases}$$

其中 K 为正数，n 为正整数，如图 2.2.1. 显然 $\eta(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，且 $\eta^{(2n-1)}(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上亦连续. 于是有

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f(x)K(x-\bar{x}_1)^{2n}(x-\bar{x}_2)^{2n}\,\mathrm{d}x > 0,$$

这和(2.1)矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必定不大于零，由 x_0 的任意性，故有

$$f(x) \leqslant 0, \quad x \in [x_1, x_2],$$

矛盾. 如果设 $f(x_0) < 0$，同样可以推出矛盾，得出 $f(x) \geqslant 0$. 这就证明 $f(x) \equiv 0$.

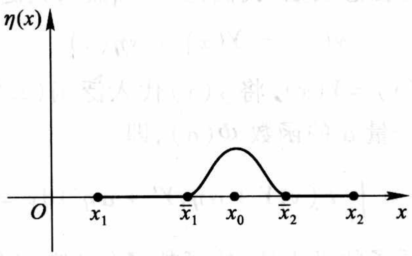


图 2.2.1

关于泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

的极小值，有下面基本定理.

基本定理 设泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

其中函数 F 是三个独立变量的已知函数，且具有二阶连续偏导数，其可取函数的集合为

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2)}_{[x_1, x_2]} \\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \end{array} \right\}. \tag{2.3}$$

$Y(x) \in A$ 使泛函(2.2)取得极小的必要条件是：$Y(x)$ 是微分方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \tag{2.4}$$

的解.

方程(2.4)就是著名的欧拉(Euler)方程,将$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$展开,方程(2.4)就是下列二阶微分方程

$$F_y(x,y,y')-F_{xy'}(x,y,y')-F_{yy'}(x,y,y')y'-F_{y'y'}(x,y,y')y''=0. \tag{2.4$'$}$$

证明 我们采用变分法中惯用的办法,即用下面简单而又巧妙的想法,把泛函(2.2)的极值问题归结为函数的极值问题.

设 $y=Y(x)$ 使泛函(2.2)取得极值,$\eta(x)$ 是在区间 $[x_1,x_2]$ 上有二阶连续导数,且满足

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \tag{2.5}$$

的任意取定的函数,α 为任意实数. 我们把 $Y(x)$ 嵌入到泛函(2.2)的可取函数类

$$y(x)=Y(x)+\alpha\eta(x)$$

中. 显然,当 $\alpha=0$ 时,$y(x)=Y(x)$. 将 $y(x)$ 代入泛函(2.2)进行计算,把 x 积分掉,于是得到一个含参变量 α 的函数 $\Phi(\alpha)$,即

$$I[y(\cdot)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,Y+\alpha\eta,Y'+\alpha\eta')\mathrm{d}x=\Phi(\alpha). \tag{2.6}$$

因为 $Y(x)$ 给出了泛函的极小值,故函数 $\Phi(\alpha)$ 应该在 $\alpha=0$ 时具有极小值,根据费马定理,其导数在这点当然要等于零,即

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}[F_y(x,Y,Y')\eta+F_{y'}(x,Y,Y')\eta']\mathrm{d}x=0. \tag{2.7}$$

为了获得欧拉方程,将(2.7)的第二项分部积分,并注意到(2.5),则有

$$\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}_{y'}\eta'\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x,$$

其中 $\overline{F}_{y'}=F_{y'}(x,Y(x),Y'(x))$. 又令 $\overline{F}_y=F_y(x,Y(x),Y'(x))$,将上式代入(2.7)得到

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\eta\left(\overline{F}_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right)\mathrm{d}x=0. \tag{2.8}$$

由于上式对于满足基本引理条件的 $\eta(x)$,积分(2.8)都为零,根据变分学的基本引理,推出

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0.$$

这样,我们就证明了:如果函数 $Y(x)$ 能使泛函 $I[y(\cdot)]$ 取得极值,它必须是欧

拉方程(2.4)的解.

下面以最速降线为例,用欧拉方程解变分问题.

例 1 求泛函

$$T[y(\cdot)] = \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

在可取函数集合

$$A = \left\{ y(x) \middle| \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2)}_{[0,x_2]} \\ y(0) = 0, y(x_2) = y_2 \end{array} \right\}$$

上的最小函数.

这个问题就是上节提出的最速降线,不过这里的泛函和 §2.1 中的泛函(1.3)差了一个常数因子$\frac{1}{\sqrt{2g}}$,而常数因子对变分问题的解没有贡献. 在这个问题里,因为泛函的被积式为

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},$$

故其欧拉方程为

$$-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left(y^{-\frac{1}{2}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0,$$

经过简化之后,它可以化成

$$\frac{2y''}{1+y'^2} = -\frac{1}{y},$$

把等式的两边都乘 y',并积分得

$$\ln(1+y'^2) = -\ln y + \ln K,$$

即

$$y'^2 = \frac{K}{y} - 1,$$

由此得到

$$\sqrt{\frac{y}{K-y}}dy = \pm dx, \tag{2.9}$$

令 $y = \frac{K}{2}(1-\cos u)$,于是有

$$\mathrm{d}y = \frac{K}{2}\sin u\mathrm{d}u,$$

将它代入(2.9),并化简后得到

$$\frac{K}{2}(1-\cos u)\mathrm{d}u = \pm\,\mathrm{d}x,$$

把上式积分,得到

$$x = \pm\frac{K}{2}(u-\sin u)+c,$$

因为曲线通过坐标原点,故有 $c=0$.

由此可见,最速降线是旋轮线,也叫摆线:

$$\begin{cases} x = \dfrac{K}{2}(u-\sin u), \\ y = \dfrac{K}{2}(1-\cos u), \end{cases}$$

其中常数 K 可由这条曲线经过点 $M_2(x_2,y_2)$ 的条件确定.

在变分学中,常遇到形如

$$I[y(\cdot)] = \int_a^b v(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

的泛函,这是某个函数 $v(x,y)$ 沿弧长的积分. 泛函(2.10)的欧拉方程是

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= v_y(x,y)\sqrt{1+y'^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[v(x,y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] \\ &= v_y\sqrt{1+y'^2}-v_x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-v_y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-v\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left(v_y-v_xy'-v\frac{y''}{1+y'^2}\right)=0,\end{aligned}$$

即欧拉方程为

$$v_y-v_xy'-v\frac{y''}{1+y'^2}=0.$$

§2.3 欧拉方程的积分法与退化情形

在上面 §2.2 中,所研究的最简单的变分问题的泛函(2.2)的欧拉方程,是

一个二阶常微分方程,而求极值曲线就是要积分欧拉方程. 一般说来,这是个困难的问题. 然而,在某些特殊情况下,比较容易求得首次积分或极值曲线. 我们就泛函(2.2)的被积表达式 $F(x,y,y')$ 的几种特殊形式分别进行讨论.

(1) 若 F 中不含 y,即 $F=F(x,y')$,这时,欧拉方程(2.4)具有首次积分

$$F_{y'}(x,y') = c_1. \tag{3.1}$$

事实上,由于

$$F_y(x,y') = 0,$$

这时欧拉方程(2.4)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y') = 0,$$

因此,欧拉方程有首次积分

$$F_{y'}(x,y') = c_1.$$

例 1 求泛函 $I[y(\cdot)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\mathrm{d}x$ 的极值曲线,可取函数集合为

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2)}_{[1,2]} \\ y(1) = 0, y(2) = 1 \end{array} \right\}.$$

解 因为被积式中不显含 y,故欧拉方程有首次积分

$$F_{y'}(x,y') = c_1,$$

即

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = c_1,$$

由此推得

$$y'^2(1-x^2c_1^2) = c_1^2x^2,$$

即

$$y' = \pm\frac{c_1x}{\sqrt{1-c_1^2x^2}},$$

因此,有

$$y = \pm\int\frac{c_1x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-c_1^2x^2}} = \mp\frac{1}{c_1}\sqrt{1-c_1^2x^2} + c_2,$$

即

$$(y-c_2)^2+x^2=\frac{1}{c_1^2},$$

由条件 $y(1)=0, y(2)=1$，得到 $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2=2$，这样，最后的解为

$$(y-2)^2+x^2=5.$$

例 2 求泛函

$$I[y(\cdot)]=\int_{x_1}^{x_2}(y'^2-4xy')\mathrm{d}x$$

的极值曲线，其可取函数集合为

$$A=\left\{y(x)\left|\begin{array}{l}y(x)\in C^{(2)}_{[x_1,x_2]}\\ y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2\end{array}\right.\right\}.$$

解 由于 $F(x,y,y')=y'^2-4xy'$ 中不显含 y，故欧拉方程有首次积分 $F_{y'}(x,y')=2c_1$，即

$$2y'-4x=2c_1,$$

从而有

$$y'=2x+c_1,$$

积分得

$$y=x^2+c_1x+c_2,$$

由边界条件：$y(x_1)=y_1$ 和 $y(x_2)=y_2$，可以确定 c_1, c_2 为

$$c_1=\frac{y_2-y_1-x_2^2+x_1^2}{x_2-x_1},\quad c_2=y_2-x_2^2-x_2\frac{y_2-y_1-x_2^2+x_1^2}{x_2-x_1}.$$

其解为

$$y=x^2+\frac{y_2-y_1-x_2^2+x_1^2}{x_2-x_1}x+y_2-x_2^2-x_2\frac{y_2-y_1-x_2^2+x_1^2}{x_2-x_1}.$$

(2) F 中不含 x，即 $F=F(y,y')$，这时欧拉方程有首次积分

$$F-y'F_{y'}=c_1. \tag{3.2}$$

事实上，由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F-y'F_{y'})=F_x+F_yy'+F_{y'}y''-F_{y'}y''-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'},$$

在上式中，因 F 中不显含 x，故 $F_x=0$，将中间含 y'' 的两项抵消，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_{y'}) = \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)y' = 0,$$

积分得

$$F - y'F_{y'} = c_1.$$

例 3 求 $\min\limits_{y(x)\in A}\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$,其可取函数集合为

$$A = \left\{ y(x) \middle| \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2)}_{[x_1,x_2]} \\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \end{array} \right\}.$$

这个例题就是前节得出的最小旋转曲面问题(参看§2.1),不过,这里略去了泛函前面对变分问题没有贡献的常数因子 2π.

解 因 $F = y\sqrt{1+y'^2}$,即被积函数只依赖于 y 和 y',因而欧拉方程有首次积分 $F - y'F_{y'} = c_1$,即

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1,$$

化简得

$$c_1\sqrt{1+y'^2} = y,$$

作代换 $y' = \operatorname{sh} t$,则上述微分方程就很便于积分,此时上式为 $y = c_1 \operatorname{ch} t$.

而由

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = c_1 \mathrm{d}t,$$

积分可得

$$x = c_1 t + c_2,$$

因而得到参数形式的解

$$\begin{cases} x = c_1 t + c_2, \\ y = c_1 \operatorname{ch} t, \end{cases}$$

消去参数 t,得到 $y = c_1 \operatorname{ch}\dfrac{x - c_2}{c_1}$,这是一族悬链线,其中积分常数 c_1, c_2 由它通过边界点的条件来确定.

下面,我们再讨论欧拉方程的退化情形.

若 F 不依赖 y',则欧拉方程退化为

$$F_y(x,y) = 0. \tag{3.3}$$

它不是个微分方程，不含有积分常数，它可能代表几支曲线. 因此，一般说来，所讨论的变分问题无解. 然而，当曲线(3.3)适合给定的边界条件时，它才是极值曲线，不过，这是极特殊的情形.

若 F 是 y' 的线性函数，即

$$F(x,y,y') = P(x,y) + Q(x,y)y',$$

这时，欧拉方程为

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = 0, \tag{3.4}$$

但是

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}y',$$

所以(3.4)式简化为

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{3.5}$$

它也不是一个微分方程. 一般说来，它不满足固定边界条件. 因此，变分问题的解不存在. 如果(3.5)式成立，则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是个全微分，而泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1}\left(P + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \int_{P_0}^{P_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{3.6}$$

是一个线积分. 由(3.5)可知线积分(3.6)与路径无关，即泛函在一切通过两固定点的曲线上，都有相同的值，因此这样的变分就是一个很平凡的问题.

§2.4 变分的概念及其运算

我们知道，自变量的改变量 Δx 叫自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$. 设函数 $y = \Phi(x)$，在原点的邻近满足适当的可微条件，我们称 $\Phi'(0)\cdot\mathrm{d}x$ 为函数 $\Phi(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶微分.

相应于函数的这个概念，我们在变分法中将引进变分概念. 对于泛函 $I[y(\cdot)]$ 而言，在 x 取固定值时，如果函数 $y(x)$ 从 $Y(x)$ 变成 $y(x) = Y(x) + \alpha\eta(x)$ ($y(x)$ 和 $Y(x)$ 都满足某种边界条件)，则称差 $y(x) - Y(x) = \alpha\eta(x)$ 为函数 $y(x)$ 的变分，记作 δy，即

$$\delta y = \alpha\eta(x). \tag{4.1}$$

由 §2.2 知泛函 $I[y(\cdot)]$ 就变成了一个参数 α 的函数，即

$$I[y(\cdot)] = \Phi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y + \alpha\eta, Y' + \alpha\eta')\,\mathrm{d}x,$$

与函数的一阶微分相应，有

$$\begin{aligned}\Phi'(0)\alpha &= \alpha\int_{x_1}^{x_2}(\eta\overline{F}_y + \eta'\overline{F}_{y'})\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha\int_{x_1}^{x_2}\left(\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right)\eta\,\mathrm{d}x + \alpha\overline{F}_{y'}\eta\,\Big|_{x_1}^{x_2}\text{①} \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x + \overline{F}_{y'}\delta y\,\Big|_{x_1}^{x_2},\end{aligned}$$

我们把最后一式称为泛函 $I[y(\cdot)]$ 在 $y = Y(x)$ 上的一阶变分，把它记作 $\delta I\,\big|_{y=Y(x)}$，

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x + \overline{F}_{y'}\delta y\,\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{4.2}$$

在物理力学中进行变分演算时，常常使用变分符号 δ. δ 的性质在许多方面与微积分符号 d 相类似.

已知一个函数 $F(x, y(x), y'(x))$，或简单地记作 $F(x, y, y')$，我们考虑 x 是固定的，定义

$$\Delta F = F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') - F(x, y, y'), \tag{4.3}$$

利用泰勒(Taylor)展开式

$$F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha\eta' + \cdots, \tag{4.4}$$

这里省略号…包含 $\alpha^2, \alpha^3, \cdots$ 这样一些项，于是(4.3)可写为

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha\eta' + \cdots, \tag{4.5}$$

(4.5)的右面的前两项之和用 δF 来记，并称为 F 的变分，即

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y', \tag{4.6}$$

其中

$$\delta y = \alpha\eta, \quad \delta y' = \alpha\eta'.$$

从上式我们看到

---

① 在 §2.2 中，因 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ 故 $\alpha\overline{F}_{y'}\eta\,\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$. 在这里，我们给出较一般的假设：$\eta(x)$ 满足某种边界条件，而不一定是 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \alpha\eta' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y), \tag{4.7}$$

即

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y), \quad 或 \quad \delta y' = (\delta y)', \tag{4.8}$$

这说明算子 δ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是可交换的. 关于变分的运算法则,我们有以下结论.

命题 设 F_1 和 F_2 是 x,y,y' 的可微函数,则有

(1) $\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$;

(2) $\delta(F_1 F_2) = F_1\delta F_2 + F_2\delta F_1$;

(3) $\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\delta F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$.

证明 (1) 由定义(4.6)有

$$\begin{aligned}\delta(F_1 + F_2) &= \frac{\partial(F_1 + F_2)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(F_1 + F_2)}{\partial y'}\delta y' \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y' \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y'\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y'\right) \\ &= \delta F_1 + \delta F_2.\end{aligned}$$

同样可证(2).

(3) 由 §2.2 的(2.7)式乘 α,有

$$\begin{aligned}\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x\right)\delta y + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y'}\left(\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x\right)\delta y' \\ &= \left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}x\right)\delta y + \left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}x\right)\delta y' \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\delta F\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里,我们应用了在积分号下求微分的法则,到此命题证完.

定理 设可取函数集合 $A = \left\{ y(x) \left| \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2)}_{[x_1,x_2]} \\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \end{array} \right. \right\}$，则泛函 $\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ 取得极值的必要条件是

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 将§2.2的(2.7)式乘 α，可知极值的必要条件是

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha\eta' \right) \mathrm{d}x = 0,$$

但上式可改写为

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = \delta \int_{x_1}^{x_2} F \mathrm{d}x,$$

此即为所需的结果，定理证完.

最后我们指出，由 $\delta \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x = 0$ 可以推出欧拉方程. 事实上，因为

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) \mathrm{d}x,$$

将积分号内 $\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$ 分部积分，且注意到 $\delta y|_{x_1} = \delta y|_{x_2} = 0$，我们有

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right) \delta y \mathrm{d}x = 0,$$

由于 δy 的任意性，根据变分学的基本引理，则有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0,$$

从而又得到欧拉方程. 工程中常用的是这种方法.

§2.5 含有多个函数的情形

在§2.2中，我们研究了最简单的变分问题，得到了泛函取得极值的必要条件是：其极值函数应满足欧拉方程. 但是，不管在理论方面或是在应用方面，都需要我们作进一步的推广. 例如，当我们在分析动力学中研究质点（或质点系）运动时，一个质点的运动由它的坐标对时间的依赖关系来确定，研究这种较复杂的情形，就导出了依赖于几个函数的泛函的变分问题，即具有几个函数作变元的多

元泛函的变分问题.

我们先讨论依赖两个变元 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的泛函的情形,因为函数的个数更多时,在原则上并没有什么区别.

定理 设可取函数集合

$$A_i = \left\{ y_i(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y_i(x) \in C^{(2)}_{[x_1,x_2]} \\ y_i(x_1) = y_{i1}, y_i(x_2) = y_{i2} \end{array} \right\} \quad (i = 1,2),$$

(其中 $y_{i1}, y_{i2}(i=1,2)$ 是给定的数),以及定义在可取函数集合 $A_i(i=1,2)$ 上的泛函为

$$I[y_1(\cdot), y_2(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2)\,\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

当 $F(x,y_1,y_2,y'_1,y'_2)$ 对所有变元有二阶连续偏导数时,$y_i = Y_i(x)(i=1,2)$ 使泛函(5.1)取得极值的必要条件为

$$y_i = Y_i(x) \quad (i = 1,2)$$

是微分方程组

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'_i} = 0 \quad (i = 1,2)$$

的解.

证明 设 $y_i = Y_i(x) \in A_i(i=1,2)$ 使泛函(5.1)取得极小.我们在考察函数 $Y_i(x)(i=1,2)$ 的同时,还考察其可取函数集合

$$y_i = Y_i(x) + \alpha\eta_i(x) \quad (i = 1,2),$$

式中的 α 是一个参数,$\eta_i(x)$ 是任意给定的在 $[x_1,x_2]$ 上连续可微的函数,而且它们在区间的两端点 x_1, x_2 都等于零.显然,当 $\alpha=0$ 时,$y_i(x) = Y_i(x)\ (i=1,2)$,把它们代入(5.1)得

$$\begin{aligned} I[y_1(\cdot), y_2(\cdot)] &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y_1 + \alpha\eta_1, Y_2 + \alpha\eta_2, Y'_1 + \alpha\eta'_1, Y'_2 + \alpha\eta'_2)\,\mathrm{d}x \\ &= \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

因为 $Y_i(x)(i=1,2)$ 给出了泛函的极小值,故当 $\alpha=0$ 时,$\Phi(\alpha)$ 取得极小值,因此有

$$\Phi'(0) = 0,$$

即

$$\int_{x_1}^{x_2} (\overline{F}_{y_1}\eta_1 + \overline{F}_{y_2}\eta_2 + \overline{F}_{y'_1}\eta'_1 + \overline{F}_{y'_2}\eta'_2)\,\mathrm{d}x = 0,$$

把含 $\eta'_i(i=1,2)$ 的两项分部积分以后，考虑到 $\eta_i(x)(i=1,2)$ 在 x_1,x_2 两点为零，故有

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\overline{F}_{y_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'_1}\right]\eta_1(x)+\left[\overline{F}_{y_2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'_2}\right]\eta_2(x)\right\}\mathrm{d}x=0,$$

这个等式应该对于任意满足 $\eta_i(x_j)=0(i=1,2;j=1,2)$ 的连续可微函数 $\eta_1(x)$，$\eta_2(x)$ 都成立，根据变分学的基本引理，则有

$$\overline{F}_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'_i}=0\quad(i=1,2).\tag{5.2}$$

我们把微分方程组(5.2)仍称为泛函(5.1)的欧拉方程.

例 1 设

$$A_1=\left\{y(x)\,\middle|\,\begin{array}{l}y(x)\in C^{(2)}_{[0,\frac{\pi}{2}]}\\ y(0)=0,y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\end{array}\right\},$$

$$A_2=\left\{z(x)\,\middle|\,\begin{array}{l}z(x)\in C^{(2)}_{[0,\frac{\pi}{2}]}\\ z(0)=0,z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\end{array}\right\}$$

为泛函

$$I[y(\cdot),z(\cdot)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)\,\mathrm{d}x$$

的可取函数集合，求此泛函的极值曲线.

解 极值曲线是欧拉方程的解. 因为

$$F=y'^2+z'^2+2yz,$$

按(5.2)式有欧拉方程为

$$\begin{cases}y''-z=0,\\ z''-y=0,\end{cases}$$

对第一式求二阶导数，再与第二式相加得

$$y^{(4)}-y=0,$$

其通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x,$$

又由 $z-y''=0$ 得到

$$z=y''=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x.$$

因为 $y \in A_1, z \in A_2$，即要使 $y(x), z(x)$ 分别满足边界条件

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

因而求得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 1.$$

于是，所求的极值曲线为 $y = \sin x, z = -\sin x$.

我们可把上述结论推广到含有 n 个函数的情形. 设可取函数集合是

$$A_i = \left\{ y_i(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y_i(x) \in C^{(2)}_{[x_1, x_2]} \\ y_i(x_1) = y_{i1}, y_i(x_2) = y_{i2} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 $y_{i1}, y_{i2}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是给定的数，定义在可取函数集合 $A_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上的泛函是

$$I[y_1(\cdot), \cdots, y_n(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \cdots, y_n, y'_1, \cdots, y'_n)\,\mathrm{d}x, \tag{5.3}$$

其中 F 对所有变元有连续的二阶偏导数. 我们断定：$y_i = Y_i(x)\ (Y_i(x) \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n)$ 使泛函(5.3)取得极值的必要条件是它们满足方程组

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{5.4}$$

微分方程组(5.4)也称为泛函(5.3)的欧拉方程.

关于欧拉方程组(5.4)的积分，和最简单的变分问题一样，我们可以类似地证明：

如果 F 不显含 x，即 $F = F(y_1, \cdots, y_n, y'_1, \cdots, y'_n)$，则欧拉方程组有首次积分

$$F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i} = c, \tag{5.5}$$

其中 c 为积分常数.

§2.6 含有高阶导数的情形

到现在为止，我们研究了依赖多个函数的形如

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y'_1, y'_2, \cdots, y'_n)\,\mathrm{d}x$$

的泛函的变分问题，此泛函的被积式中并未含二阶及其以上的导数，但在一系列

问题(例如弹性理论)中,经常遇到含高阶导数的泛函.所谓含高阶导数的泛函,即是指泛函的被积式所包含的未知函数的导数,可能有一阶,而且一定还含有高阶导数.上述寻求泛函极值的方法可以毫无本质改变地搬到这个较一般的情况中.为了简单起见,先限制在含有一个未知函数的情况.

定理 依赖于高阶导数的泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})\,dx, \tag{6.1}$$

其可取函数集合为

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2n)}_{[x_1,x_2]} \\ y^{(i)}(x_1) = y_1^{(i)}, y^{(i)}(x_2) = y_2^{(i)}, i = 0,1,\cdots,n-1 \end{array} \right\},$$

其中 $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 是给定的数.

如果 F 对其变元有 $n+1$ 阶连续偏导数,则 $y=Y(x)\in A$ 使泛函(6.1)取得极值的必要条件是 $Y(x)$ 满足方程

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{6.2}$$

我们称方程(6.2)为欧拉-泊松(Poisson)方程.

证明 我们用一阶变分为零来证明这个定理.设 $Y(x)$ 使泛函(6.1)取得极小,我们把 $Y(x)$ 嵌入到它邻近的可取函数集合

$$y(x) = Y(x) + \alpha\eta(x)$$

中,这里 α 为任意实数,$\eta(x)$ 为 n 阶连续可导,且满足固定边界条件

$$\begin{aligned} \eta(x_1) = \eta'(x_1) = \cdots = \eta^{(n-1)}(x_1) = \eta(x_2) = \eta'(x_2) \\ = \cdots = \eta^{(n-1)}(x_2) = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

的任意函数.我们计算泛函值 $I[y(\cdot)]$,对取定的 $\eta(x)$,它的值是 α 的函数,即

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})\,dx = \Phi(\alpha),$$

泛函(6.1)的一阶变分是

$$\begin{aligned} \delta I &= \alpha\left(\frac{d}{d\alpha}\Phi(\alpha)\right)_{\alpha=0} = \alpha\left\{\frac{d}{d\alpha}I[y(\cdot)]_{\alpha=0}\right\} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \alpha[\overline{F}_y + \overline{F}_{y'}\eta' + \cdots + \overline{F}_{y^{(n)}}\eta^{(n)}]\,dx, \end{aligned} \tag{6.4}$$

对上式进行分部积分,并利用 $\eta(x)$ 的边界条件(6.3),我们得到

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\overline{F}_y - \frac{d}{dx}\overline{F}_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\overline{F}_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\overline{F}_{y^{(n)}}\right)\delta y\,dx,$$

泛函取得极值的必要条件是一阶变分为零. 由于函数变分 δy 的任意性,根据变分学的基本引理,我们推得欧拉 - 泊松方程(6.2).

例 1 设可取函数集合为

$$A=\left\{y(x)\left|\begin{array}{l}y(x)\in C_{[0,1]}^{(4)}\\ y(0)=0,y'(0)=1,y(1)=1,y'(1)=1\end{array}\right.\right\}.$$

求泛函

$$I[y(\cdot)]=\int_0^1(1+y''^2)\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

的极值曲线,并判断泛函在此极值曲线上取得极值的情况.

解 因为 $F=1+y''^2$,所以,泛函(6.5)的欧拉 - 泊松方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(2y'')=0,$$

即 $y^{(4)}=0$,它的通解是

$$y=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4,$$

由 $y(x)$满足条件: $y(0)=0,y'(0)=1,y(1)=1,y'(1)=1$,我们可以定出

$$c_1=c_2=c_4=0,\quad c_3=1,$$

于是得出极值曲线是 $y=x$. 这就是说,泛函的极值只可能在直线 $y=x$ 上取得. 然而,泛函是否真的在 $y=x$ 上取得了极值? 是取极大值还是取极小值? 对于简单泛函(6.5),我们不难直接看出,$y=x\in A$ 可以使 $1+y''^2=1$ 达到最小,因而使泛函(6.5)达到最小. 对一般泛函的极值曲线进行这种判断的问题,则要到本书的第六章才能涉及.

对于依赖于多个函数的高阶导函数的泛函

$$I[y_1(\cdot),\cdots,y_m(\cdot)]=\int_{x_1}^{x_2}f[x,y_1,y'_1,\cdots,y_1^{(n_1)},y_2,y'_2,\cdots,y_2^{(n_2)},\cdots,$$
$$y_m,y'_m,\cdots,y_m^{(n_m)}]\mathrm{d}x$$

的极值问题,可以作同样的推理,并得到更一般的结论,这时欧拉 - 泊松方程组为

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_i}+\cdots+(-1)^{n_i}\frac{\mathrm{d}^{n_i}}{\mathrm{d}x^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0\quad(i=1,2,\cdots,m). \tag{6.6}$$

§2.7 两个以上的独立变量的情形

我们讨论由重积分定义的泛函的极值问题. 为了简单起见,先考虑如下的

泛函

$$I[u(\cdot,\cdot)]=\iint_B F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7.1}$$

并设 F 对所有变元二阶连续可导，B 为 xOy 坐标面上由边界线 Γ 围成的区域，可取函数集合为

$$C_B^{(2)}=\left\{u(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}u(x,y)\text{ 在区域 }B\text{ 内二阶连续可导}\\ u|_\Gamma=f(M)\end{array}\right\},$$

其中 $f(M)$ 是个已知的函数. 同样有

定理 $I[U(\cdot,\cdot)]=\min\limits_{u\in C_B^{(2)}} I[u(\cdot,\cdot)]$ 的必要条件是 $u=U(x,y)$ 是边值问题

$$\begin{cases}F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0,\\ u|_\Gamma=f(M)\end{cases} \tag{7.2}$$

的解.

证明 假设泛函(7.1)取得极小的函数是 $U(x,y)$，我们考察它的同时，还考察其可取函数集合

$$\bar{u}(x,y)=U(x,y)+\alpha\eta(x,y),$$

其中 $\eta(x,y)$ 是任意二阶连续可微的函数，且满足 $\eta(x,y)|_\Gamma=0$. 显然，当 $\alpha=0$ 时，$\bar{u}(x,y)$ 就是 $U(x,y)$. 将 $\bar{u}(x,y)$ 代入(7.1)，有

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha)&=I[\bar{u}(x,y)]\\&=\iint_B F(x,y,U+\alpha\eta,U_x+\alpha\eta_x,U_y+\alpha\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

我们用一阶变分为零来推导(7.2)式，我们知道，它的一阶变分是

$$\delta I=\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\Phi(\alpha)\Big|_{\alpha=0}\right)=\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I[U+\alpha\eta]\Big|_{\alpha=0}\right\},$$

即

$$\delta I=\alpha\iint_B(\bar{F}_u\eta+\bar{F}_{u_x}\eta_x+\bar{F}_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7.3}$$

对(7.3)积分式中的后两项应用格林(Green)公式①，得到

---

① $\oint_\Gamma X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\iint_B\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$$\iint_B (\eta_x \overline{F}_{u_x} + \eta_y \overline{F}_{u_y}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\Gamma \eta(\overline{F}_{u_x}\mathrm{d}y - \overline{F}_{u_y}\mathrm{d}x) - \iint_B \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{F}_{u_y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (7.4)$$

将(7.4)代入(7.3)得

$$\begin{aligned}\delta I &= \alpha \iint_B \eta\left(\overline{F}_u - \frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{F}_{u_y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \alpha\oint_\Gamma \eta(\overline{F}_{u_x}\mathrm{d}y - \overline{F}_{u_y}\mathrm{d}x)\\ &= \iint_B \delta u\left(\overline{F}_u - \frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{F}_{u_y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma \delta u(\overline{F}_{u_x}\mathrm{d}y - \overline{F}_{u_y}\mathrm{d}x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

由于 $\delta u = \alpha\eta(x,y)$ 的任意性及变分学基本引理①,推出

$$\overline{F}_u - \frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{F}_{u_y} = 0,$$

这样就证明了我们的结论,我们仍把微分方程(7.2)称为泛函(7.1)的欧拉方程.

例 1 设泛函为

$$I[w(\cdot,\cdot)] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 B 是以 Γ 为边界所围成的区域,可取函数集合为

$$C_B^{(2)} = \left\{ w(x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} w(x,y) \text{ 在 } B \text{ 内二阶连续可导} \\ w(x,y)\big|_\Gamma = f(x,y) \end{matrix} \right\},$$

由(7.2)推知,本题中的欧拉方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

或缩写为

$$\Delta w = 0,$$

这是有名的拉普拉斯(Laplace)方程,如果还要求满足边界条件

$$w(x,y)\big|_\Gamma = f(x,y),$$

① 设 $f(x,y)$ 在区域 B 内连续,$\eta(x,y)$ 为在区域 B 内有二阶连续偏导数,且在区域 B 的边界 Γ 上满足 $\eta(x,y)\big|_\Gamma = 0$ 的任意函数,如果对于这样的任意的 $\eta(x,y)$,都有 $\iint_B f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ 成立,则有 $f(x,y) \equiv 0, \forall (x,y) \in B$.

就得到数学物理中有名的狄利克雷问题.

像§2.5,§2.6中可以把最简单的情况加以推广一样,我们也可以把泛函(7.1)在 $C_B^{(2)}$ 中取极值的必要条件,推广到可取函数为更一般的多元函数的情形.如对泛函

$$I[Z] = \int_D \cdots \int F(x_1, \cdots, x_n, Z, Z_{x_1}, Z_{x_2}, \cdots, Z_{x_n}) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

在可取函数类

$$C_D^{(2)} = \left\{ Z(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \text{ 在 } D \text{ 内二阶连续可导} \\ Z|_\Gamma = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array} \right\}$$

(其中 Γ 为区域 D 的边界)中取极值的必要条件 $\delta I = 0$,我们可以完全类似地推得欧拉方程是

$$F_Z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{Z_{x_i}} = 0. \tag{7.5}$$

即是说,若 $Z = Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使 $I[Z]$ 取得极值,则它应满足欧拉方程(7.5).

又如讨论泛函

$$I[Z(\cdot,\cdot)] = \iint_B F(x, y, Z, Z_x, Z_y, Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yy}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极值问题,我们可以得到它的欧拉方程为(这里要求满足相应的固定边界条件)

$$F_Z - \frac{\partial}{\partial x} F_{Z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{Z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{Z_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{Z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{Z_{yy}} = 0.$$

例 2 泛函

$$I[Z(\cdot,\cdot)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - 2Zf(x, y) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的欧拉方程是

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = f(x, y).$$

当 $f(x, y) = 0$ 时,通常把它称为重调和方程.当 D 的边界较复杂时,求这类边值问题的精确解,一般来说是比较困难的.

§2.8 参数表示式

前面我们一直假定可取函数及逗留函数是用显式表示,例如 $y = y(x)$, $u =$

$u(x,y)$，等等.我们知道，复杂曲线（面）通常不便于用显式表示.例如在§2.1中提到的等周问题，闭曲线用显式表示就不适当，用参数表示较好.为了扩大变分法的适用范围，本节我们将讨论可取函数用参数表示的一般情形.例如我们现在研究泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{8.1}$$

的极值问题.可以设想，可取函数不是用显式 $y=y(x)$ 表示，而是用参数式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1] \tag{8.2}$$

所给出，那么泛函(8.1)可改写为

$$I[y(\cdot),x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,\mathrm{d}t. \tag{8.3}$$

这里，我们把 $F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$ 记作 $\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})$，它是依赖两个函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的泛函.

讲到这里，读者可能会问，泛函(8.1)与(8.3)的欧拉方程用我们学过的知识都可以把它们写出来，但是它们之间有很大的差别，前者的欧拉方程是二阶常微分方程，而后者的欧拉方程是二阶常微分方程组，那么这两者是否等价呢？而泛函参数表示式的欧拉方程到底是什么？这个问题较复杂，下面我们分两步来回答.

(1) 可以肯定用参数式表示的泛函(8.3)的被积式中不显含 t 且对 $\dot{x},\dot{y}$ 是一次齐次式；进一步断定，凡被积式不显含 t，且对 $\dot{x},\dot{y}$ 是一次齐次式泛函的值，仅依赖于由参数方程：

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

表示的曲线本身，而不依赖于曲线的参数表示形式.

我们称满足条件

$$\psi(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = k\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

的代数式 $\psi(x,y,k\dot{x},k\dot{y})$ 为对 $\dot{x},\dot{y}$ 的一次齐次式.容易验证 $\psi = x^3\dot{y} + y^2\dot{x}^2/\dot{y}$ 是对 $\dot{x},\dot{y}$ 的一次齐次式，而 $\Phi = x\dot{y}^3 + \dot{x}$ 则不是.我们不难证明，参数表示式的泛函(8.3)的被积式不显含 t，且对 $\dot{x},\dot{y}$ 是一次齐次式.

下面我们证明(1)的后半部分，设泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,\mathrm{d}t$$

的被积函数 ψ 中不显含 t，且对 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 是一次齐次式. 如果用新的参数 τ 代 t，即引入变换

$$t = \varphi(\tau), \quad \tau\in[\tau_0,\tau_1],$$

则有等式

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\psi\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t_1}\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,\mathrm{d}t$$

成立.

事实上，利用 ψ 对 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 的齐次性，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_0}^{\tau_1}\psi\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\psi\left(x,y,\dot{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},\dot{y}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\cdot\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{t_0}^{t_1}\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

这样，我们就证明了泛函(8.3)的值与参数的表达式无关，它仅依赖于参数式所代表的曲线.

(2) 如果泛函(8.1)借助于曲线的某个参数式变为如下的形式

$$\int_{t_0}^{t_1}F\left(x,y,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,\mathrm{d}t,$$

则它有两个欧拉方程：

$$\psi_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\dot{x}} = 0, \quad \psi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\dot{y}} = 0, \tag{8.4}$$

这两个方程不是独立的，它们有如下的关系式

$$\dot{x}\left(\psi_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\dot{x}}\right) + \dot{y}\left(\psi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\dot{y}}\right) = 0. \tag{8.5}$$

首先，我们来分析(8.4)的两个方程不独立的原因. 因为两个欧拉方程(8.4)应该与泛函(8.1)的欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

等价,而(8.1)的欧拉方程的解 $y=y(x)$ 的参数表达式有很多种,所以我们不可能由(8.4)定出唯一的参数形式的解. 但若(8.4)的两个方程独立时,就能由它们唯一地确定参数形式解. 因此,它们不可能是独立的. 下面我们来证明这个事实,并且还将找到这两个欧拉方程之间的关系.

事实上,因为 ψ 是 $\dot{x},\dot{y}$ 的一次齐次式,即对任意一个 k,它都有齐次关系式

$$\psi(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = k\psi(x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

将上式两边对 k 求导,再令 $k=1$,得到

$$\dot{x}\psi_{\dot{x}} + \dot{y}\psi_{\dot{y}} = \psi, \tag{8.6}$$

将(8.6)微分,我们可以导出恒等式

$$\begin{aligned} &\psi_x = \dot{x}\psi_{x\dot{x}} + \dot{y}\psi_{x\dot{y}}, \quad \psi_y = \dot{x}\psi_{y\dot{x}} + \dot{y}\psi_{y\dot{y}}, \\ &\dot{x}\psi_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\psi_{\dot{y}\dot{x}} = 0, \quad \dot{x}\psi_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}\psi_{\dot{y}\dot{y}} = 0. \end{aligned} \tag{8.7}$$

由它们又得到

$$\psi_{\dot{x}\dot{x}}:\psi_{\dot{y}\dot{x}}:\psi_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{y}^2:(-\dot{x}\dot{y}):\dot{x}^2,$$

即

$$\frac{\psi_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\psi_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\psi_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2},$$

设它的比值为 k,则有 $\psi_{\dot{x}\dot{x}} = k\dot{y}^2$,$\psi_{\dot{x}\dot{y}} = -k\dot{x}\dot{y}$,$\psi_{\dot{y}\dot{y}} = k\dot{x}^2$,我们再由上面的恒等式(8.7)得到

$$\begin{aligned} \psi_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\dot{x}} &= \dot{x}\psi_{x\dot{x}} + \dot{y}\psi_{x\dot{y}} - \psi_{\dot{x}x}\dot{x} - \psi_{\dot{x}y}\dot{y} - \psi_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - \psi_{\dot{x}\dot{y}}\ddot{y} \\ &= \dot{y}[\psi_{x\dot{y}} - \psi_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})k], \end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\psi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\dot{y}} = -\dot{x}[\psi_{x\dot{y}} - \psi_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})k], \tag{8.9}$$

由(8.8)、(8.9)两式立即可证得(8.5)式. 因此,泛函(8.3)的两个欧拉方程由恒等式(8.5)联系起来.

参数表示法也可以推广到依赖于多个函数的泛函或依赖于两个以上独立变数的多元函数的泛函等情形,这里不再赘述.

§2.9 欧拉方程的不变性

我们已经知道,可导函数 $y=f(x)$ 有极值的必要条件是

$$f'(x) = 0, \tag{9.1}$$

如果 $x=\varphi(\xi)$，我们用变量 ξ 来代换变量 x，而 x 和 ξ 之间的关系 $\varphi(\xi)$ 是单调的，$\varphi'(\xi)\neq 0$. 现在求这个函数的极值，按照复合函数求导法，有

$$y=f[\varphi(\xi)],$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}=f'(x)\varphi'(\xi),$$

对于新变量 ξ 的函数来说，它有极值的必要条件是

$$f'(x)\varphi'(\xi)=0, \tag{9.2}$$

由于 $\varphi'(\xi)\neq 0$，则新条件(9.2)与旧条件(9.1)一致，这种一致性我们叫做函数极值必要条件的不变性.

一个多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有极值的必要条件与方程

$$\operatorname{grad} f=0$$

相当，这里 $\operatorname{grad} f$ 表示函数 f 的梯度，在 n 维空间，它是以 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为分量的一个向量. 我们知道，函数的梯度向量具有不变性. 把函数极值的上述讨论与定义的函数空间的泛函的极值类比，因为泛函取得极值的必要条件是欧拉微分式 $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$ 为零，因而我们可以把欧拉微分式作为泛函的梯度. 下面我们证明欧拉方程也具有不变性.

首先，我们研究具有固定端点的最简单的泛函

$$I[y(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x. \tag{9.3}$$

它的欧拉方程是

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0, \tag{9.4}$$

如果我们对泛函(9.3)作变量代换

$$x=x(\xi),\quad y=y[x(\xi)]=y(\xi),$$

且令

$$F\left[x(\xi),y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right]=G\left(\xi,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right),$$

我们有

$$I_1[y(\cdot)]=\int_{\xi_0}^{\xi_1}G\left(\xi,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi\,. \tag{9.5}$$

与前面一样，我们仍以 $y+\alpha\eta$ 表示 y 的邻近函数. 于是

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\eta\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')\mathrm{d}x\right]_{\alpha=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\int_{\xi_0}^{\xi_1}G\left(\xi,y+\alpha\eta,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}+\alpha\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi\right]_{\alpha=0}$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\left(G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}}\right]\eta\mathrm{d}\xi = 0,$$

因为 η 是任意的,所以我们有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = \left[\left(G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}}\right]\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}, \tag{9.6}$$

上式左边以 x 作自变量,右边以 ξ 为自变量,令(9.6)式为零得到对 ξ 的欧拉方程

$$\left[G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right]_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}} = 0, \tag{9.7}$$

它与(9.2)式类似,显然与欧拉方程(9.4)没有本质差别,这就是欧拉方程的不变性. 由此,我们可以判定,如果 $y=y(x)$ 满足欧拉方程(9.4),则 $y=y[x(\xi)]$ 满足欧拉方程(9.7).

为了计算变分问题简单起见,我们常采用曲线坐标,故将上述变换加以推广. 设变换公式为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \left(\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0\right), \tag{9.8}$$

在平面 xOy 上给出的曲线 $y=y(x)$ 对应着平面 uOv 上由方程

$$v = v(u)$$

定义的曲线.

在代换(9.8)下,泛函(9.3)变为泛函

$$J[v(\cdot)] = \int_{u_0}^{u_1}F\left(x(u,v),y(u,v),\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial y}{\partial v}v'}{\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}v'}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'\right)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{u_0}^{u_1}F_1(u,v,v')\mathrm{d}u. \tag{9.9}$$

同样可以断定,如果函数 $y=y(x)$ 满足欧拉方程(9.4),则函数 $v=v(u)$ 满足对应的欧拉方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0,$$

其中

$$F_1(u,v,v') = F\left(x(u,v),y(u,v),\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial y}{\partial v}v'}{\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}v'}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'\right).$$

欧拉方程的不变性有下述应用. 当我们在解欧拉方程时,常常用这样或那样的变量代换. 由于这个不变性,这种代换可以不在微分方程里完成,而直接在泛函表示的积分中进行,然后对已经得到的新的积分式写出欧拉方程.

例如,我们求泛函

$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi \tag{9.10}$$

的极值曲线,其中 $\rho = \rho(\varphi)$,对应的欧拉方程是

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} = 0, \tag{9.11}$$

我们可以用欧拉方程的不变性来解这个问题. 为此,令

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,$$

(9.10)变为

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

它对应的欧拉方程为 $y''=0$,通解为 $y = c_1x + c_2$, 因此(9.11)的通解为

$$\rho\sin\varphi = c_1\rho\cos\varphi + c_2,$$

其中积分常数 c_1, c_2 由边界条件确定.

对于多个自变量情形的泛函的欧拉方程,同样也有不变性. 例如,我们研究泛函

$$I[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B F(x,y,u,u_x,u_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9.12}$$

的欧拉方程的不变性. 作变量代换

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases} \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \neq 0\right),$$

将其代入泛函(9.12)的被积函数中,得到

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = F(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta),u,u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y)$$
$$= \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),$$

于是,泛函(9.12)成为

$$I[u(\cdot,\cdot)] = \iint_{B_1} \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{9.13}$$

同样可以得到

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial}{\partial u_\xi}\left(\Phi\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial}{\partial u_\eta}\left(\Phi\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right)\right]\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$
$$= 0.$$

并且断定,如果 $u(x,y)$ 是泛函(9.12)欧拉方程的解,则 $u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ 是泛函(9.13)欧拉方程的解.

习　题　二

1. 什么叫极值曲线? 欧拉方程的解是泛函取得极值的什么条件?

2. 试在连接点 $A(1,3)$ 与 $B(2,5)$ 的光滑曲线集合中,求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_1^2 y'(1 + x^2y')\mathrm{d}x$$

的极值曲线.

3. 试在连接点 $A(0,1)$ 与 $B(1,4)$ 的光滑曲线集合中,求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 (12xy + yy' + y'^2)\mathrm{d}x$$

的极值曲线.

4. 求下列泛函的极值曲线(族):

(1) $I[y(\cdot)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

(2) $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 - 12xy)\mathrm{d}x,$

$y \in A = \{y(x) \mid y(x) \in C^{(2)}_{[0,1]}, y(0) = 0, y(1) = 1\};$

(3) $I[y(\cdot)] = \int_0^2 (xy' + y'^2)\mathrm{d}x,$

$y \in A = \{y(x) \mid y(x) \in C^{(2)}_{[0,2]}, y(0) = 1, y(2) = 0\};$

(4) $I[y(\cdot)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')\mathrm{d}x, y(1)=2, y(2)=5$;

(5) $I[y(\cdot)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4y^2-y'^2+y)\mathrm{d}x, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;

(6) $I[y(\cdot)]=\int_{x_1}^{x_2}(y'^2+2yy'-16y^2)\mathrm{d}x$.

5. 求泛函

$$I[y(\cdot)]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x$$

的欧拉方程.

6. 假定连接点 $P_1(0,1)$ 及 $P_2(2,3)$ 的曲线 $y=Y(x)$,使得

$$I[y(\cdot)]=\int_0^2\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x=\min,$$

试求 $y=Y(x)$.

7. 设泛函

$$J[\varphi(\cdot)]=\iint_B K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+\int_a^b[\varphi(s)]^2\mathrm{d}s-2\int_a^b\varphi(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 B 为正方形区域,即 $B=\left\{(s,t)\,\middle|\,\begin{matrix}a\leqslant s\leqslant b\\ a\leqslant t\leqslant b\end{matrix}\right\}$,$K(s,t)$ 为给定的 B 上的连续函数,$f(s)$ 为给定的 $[a,b]$ 上的连续函数,且函数 $K(s,t)$ 还满足所谓对称性质,即 $K(s,t)=K(t,s)$. 证明:$J[\varphi(\cdot)]$ 取得极值的必要条件是 $\varphi(t)$ 为下面的弗雷德霍姆(Fredholm)型积分方程

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s+\varphi(t)-f(t)=0$$

的解.

8. 求下列泛函的极值曲线:

(1) $I[y(\cdot)]=\int_0^1 y'\mathrm{d}x$, $y(0)=0, y(1)=1$;

(2) $I[y(\cdot)]=\int_0^1 yy'\mathrm{d}x, y(0)=0, y(1)=1$;

(3) $I[y(\cdot)]=\int_0^1 xyy'\mathrm{d}x, y(0)=0, y(1)=1$.

9. 求下列泛函的极值曲线:

(1) $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + y^2)\mathrm{d}x$;

(2) $I[y(\cdot)] = \int_a^b \frac{1 + y^2}{y'^2}\mathrm{d}x$.

10. 求下列泛函的极值曲线：

(1) $I[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + z'^2 + y'z')\mathrm{d}x$;

(2) $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1}(16y^2 - y'^2 + x^2)\mathrm{d}x$;

(3) $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1}(2xy + y'^2)\mathrm{d}x$;

(4) $I[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\mathrm{d}x$;

(5) $I[y(\cdot)] = \int_a^b (y'')^k \mathrm{d}x, k \neq 0$ 为常数.

11. 求泛函

$$I[y(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2\mathrm{d}x, y(0) = y(1) = y'(0) = 0,\ y'(1) = 1$$

的极值曲线.

12. 求下列泛函的欧拉方程：

(1) $J[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B (u_x^2 - u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $I[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + cu^2 + 2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 a,b,c 为常数，f 为 x,y 的已知函数；

(3) $J[u(\cdot,\cdot,\cdot)] = \iiint_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

13. 用极坐标求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

的极值曲线.

第三章 条件变分与变动边界问题

§3.1 等周问题

我们知道,欲求多元函数

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在条件

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{1.1}$$

$(m < n)$下的极值,常用著名的拉格朗日(Lagrange)乘子法,构成拉格朗日函数

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{1.2}$$

再求其一阶偏导数,并令其等于零,然后与方程组(1.1)联立起来求解.

和条件极值类似,在变分学中也有条件变分问题. 在§2.1 中提到的短程线与等周问题等,都是典型的条件变分问题. 最简单的等周问题是在所有满足固定边界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \tag{1.3}$$

的光滑函数集合中,求一个函数 $y = y(x)$,满足条件(等周条件)

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = C \ (C \text{ 为常数}), \tag{1.4}$$

并使

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \min. \tag{1.5}$$

这一问题可表示为:

目标函数: $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \min$;

约束条件: $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$;

等周条件: $\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = C$;

可取函数集合: $V = \{y(x) \in C^{(2)}_{[x_0, x_1]}\}$.

在求解这个问题时，我们假定，(1.4) 和(1.5) 中的函数 G,F 对变元都有连续的二阶偏导数($x\in[x_0,x_1]$). 此外还假定，待求的函数 $y=y(x)$ 不是泛函 $\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线 ①. 在这些假定下，等周问题的解由下面定理给出.

定理 如果函数 $y=y(x)$ 给出泛函(1.5)的极小值，且满足等周条件(1.4)和固定边界(1.3)，则存在常数因子 λ 使得函数 $y(x)$ 是泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda G)\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

的逗留函数，即 $y(x)$ 是微分方程

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right)=0 \quad (H=F+\lambda G) \tag{1.7}$$

的解.

证明 设 $y=y(x)$ 为所求的解，我们把 $y=y(x)$ 嵌入到它的邻近函数集合

$$\bar{y}(x)=y+\delta y=y(x)+\alpha_1\eta(x)+\alpha_2\zeta(x) \tag{1.8}$$

中，这里 $\eta(x),\zeta(x)$(当 $x\in[x_0,x_1]$时)二阶连续可导，且满足

$$\eta(x_0)=\eta(x_1)=\zeta(x_0)=\zeta(x_1)=0,$$

α_1,α_2 为参数. 将(1.8)代入(1.4)，于是我们把等周问题变为函数的条件极值问题，即变为 α_1,α_2 的函数

$$\Phi(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha_1\eta+\alpha_2\zeta,y'+\alpha_1\eta'+\alpha_2\zeta')\mathrm{d}x$$

在条件

$$\Psi(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y+\alpha_1\eta+\alpha_2\zeta,y'+\alpha_1\eta'+\alpha_2\zeta')\mathrm{d}x=C$$

下的极值. 显然，对充分小的 α_1,α_2 的值而言，上述问题必须在 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时取得极小. 按条件极值的必要条件应有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(\Phi(\alpha_1,\alpha_2)+\lambda\Psi(\alpha_1,\alpha_2))\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\Phi(\alpha_1,\alpha_2)+\lambda\Psi(\alpha_1,\alpha_2))\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0}=0.\end{cases} \tag{1.9}$$

---

① (1.4)的左端也是定义在可取函数集合上的一个泛函. 因此它也可能以 $y=y(x)$ 为极值曲线. 在这里的假定，说明 $y=y(x)$ 上，有 $G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\neq 0$，这正是下面为了使用拉格朗日乘子法解决多元函数条件极值问题的需要.

另外，在微分学中使用拉格朗日乘子法时，还须假定有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[\Psi(\alpha_1,\alpha_2)-C]\bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=0}\neq 0$$

$$\left(或\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[\Psi(\alpha_1,\alpha_2)-C]\bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=0}\neq 0\right). \tag{1.10}$$

通过在积分号下对参变量求导和分部积分，我们得到(1.9)式的等价关系式

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]+\lambda\left[G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right]\right\}\eta\,\mathrm{d}x=0,\\&\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]+\lambda\left[G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right]\right\}\zeta\,\mathrm{d}x=0,\end{aligned} \tag{1.9$'$}$$

由(1.10)的任一个假定都可以推出有

$$G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\not\equiv 0,$$

故若令

$$H=F+\lambda G,$$

根据变分学的基本引理，由(1.9)′立即推出(1.7). 证毕.

这个定理提供了解等周问题的有效方法，它使我们能像用拉格朗日乘子法去求多元函数的条件极值一样，首先构成泛函(1.6)，然后建立微分方程(1.7)，找出它的含参数 λ 及两个任意常数的通解，最后再由边界条件(1.3)和等周条件(1.4)确定这三个常数.

上述内容可以直接推广到更一般的情形，泛函依赖多个函数，等周条件也是多个. 假设所研究的泛函是

$$I[y_1(\cdot),\cdots,y_n(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y'_1,\cdots,y'_n)\,\mathrm{d}x, \tag{1.11}$$

其可取函数的集合满足固定边界条件

$$y_i(x_0)=y_{i0},y_i(x_1)=y_{i1}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.12}$$

和等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1}G_i(x,y_1,\cdots,y_n,y'_1,\cdots,y'_n)\,\mathrm{d}x=C_i\quad(i=1,2,\cdots,m). \tag{1.13}$$

一般问题就是求函数组 $y_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$，它们满足边界条件(1.12)和等周条件(1.13)，并使泛函(1.11)取得极值，求解的方法与最简单泛函的情形类似，先构造泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i\right)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}H\mathrm{d}x,$$

然后建立相应的微分方程组

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial y'_i}\right)=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1.14}$$

解这个微分方程组,求得含 $2n$ 个任意常数及 m 个乘子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 的通解,由 $2n$ 个边界条件及 m 个等周条件确定这些常数,这样就求得了逗留函数 $y_1(x)$, $y_2(x),\cdots,y_n(x)$.

例 1 求长为 L 的柔软而均匀的绳索,两端系于 A 和 B,在自重的作用下,绳索下悬,求悬线的形状.

解 因为在平衡状态时,重心应当取最低的位置,在此我们忽略绳索的伸长,并设以 $A(x_0,y_0)$,$B(x_1,y_1)$ 为端点的悬线. 如图 3.1.1.

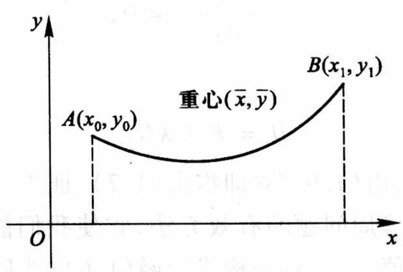


图 3.1.1

函数 $y=y(x)$ 是条件变分:

目标函数

$$I[y(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x^{①}=\min;\tag{1.15}$$

约束函数

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1\text{(固定端点)},$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=L\qquad\text{(等周条件)}.\tag{1.16}$$

---

① 重心公式为 $\bar{y}=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\Big/\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$, 这里的泛函省去了常数因子 $\frac{1}{L}$,但它不影响变分问题的解.

为此，构造辅助泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x, \tag{1.17}$$

这里 λ 是个待定常数因子，(1.17)的被积式不显含 x，故有首次积分

$$H - y'H_{y'} = c_1,$$

其中 $H=(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$. 即

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-\frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1,$$

由此得

$$y+\lambda=c_1\sqrt{1+y'^2}.$$

若令 $y'=\mathrm{sh}\ t$，则 $\sqrt{1+y'^2}=\mathrm{ch}\ t$，代入上式得

$$y+\lambda=c_1\mathrm{ch}\ t, \tag{1.18}$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{sh}\ t,\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{sh}\ t}=c_1\mathrm{d}t,$$

故

$$x=c_1t+c_2. \tag{1.19}$$

由(1.18)、(1.19)消去 t，可得悬线的形状方程为

$$y+\lambda=c_1\mathrm{ch}\frac{x-c_2}{c_1}.$$

这个方程就是悬链线方程，其中 λ, c_1, c_2 由等周条件及边界条件确定.

例 2 求长度为 L 的闭曲线，使其所围成的面积为最大.

解 设所求的曲线用参数式

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

给出，它应满足闭曲线条件

$$x(t_1)=x(t_2),\quad y(t_1)=y(t_2), \tag{1.20}$$

还要适合等周条件

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t=L, \tag{1.21}$$

并且使泛函

$$s[x(\cdot),y(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

取得最大值.

在(1.22)中略去因子$\frac{1}{2}$后,不会影响变分问题的解答.我们作函数

$$H = x\dot{y} - y\dot{x} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

则泛函$\int_{t_1}^{t_2}H\mathrm{d}t$的欧拉方程为

$$\begin{cases}\dot{y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-y + \dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0,\\ -\dot{x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x + \dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2\dot{y} - \lambda\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0,\\ 2\dot{x} + \lambda\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0,\end{cases}$$

积分一次即得

$$2(y - b) = \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\quad 2(x - a) = \frac{-\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

其中a,b是任意常数.平方后相加得

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{\lambda^2}{4},$$

可见极值曲线是半径为$\frac{\lambda}{2}$的圆,因为圆周长$L = 2\pi\cdot\frac{\lambda}{2}$,即$\lambda = \frac{L}{\pi}$,故所求的极值曲线为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.$$

这里a,b由(1.20)确定.

等周问题也是约翰·伯努利于1697年提出的,是最早提出的变分问题之一.关于这个问题的解,古希腊以前就知道.有一个故事说,古代Tyre的Phoeinican城的公主Dido离开自己的家园定居在北非的地中海沿岸,在那里她指望得

到一些土地，并且同意付给一笔固定的金额，来换取一块用一张公牛皮围起来的土地. 精明的公主把公牛皮切成细条，把条与条的端点接起来，再围出一块土地面积，其周长正好等于这些牛皮条的总长，而且她选的土地都靠海，所以沿海不用牛皮条. 公主决定牛皮条应围成一个半圆周，这样的半圆周与海岸所围成的土地面积是最大的. 我们将这一问题作为一个习题，留给读者自己完成.

§3.2 短程线问题

条件变分问题中的条件，可以有不同的形式，例如前一节的附加条件是以积分为定值的形式给出，而本节短程线问题中的附加条件都是以隐函数的形式出现的. 我们先研究最简单的情形，即在已知的曲面

$$G(x,y,z) = 0 \tag{2.1}$$

上，求一条空间曲线

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad x \in (x_0, x_1),$$

使得泛函

$$I[y(\cdot), z(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

取极小值，这个问题的解由下面定理给出. 即

定理 假设在曲面：$G(x,y,z)=0$ 上有两点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 且 G_y，G_z 不同时为 0. 在曲面上过 M_0，M_1 两点的所有曲线中，求出曲线

$$y = y(x), \quad z = z(x). \tag{2.3}$$

则存在函数 $\lambda(x)$，使得曲线(2.3)是泛函

$$\int_{x_0}^{x_1} [F + \lambda(x)G]\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} H\,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

的极值曲线，且 (2.3)是满足微分方程组

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y'} = 0, \quad H_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{z'} = 0 \tag{2.5}$$

的解.

证明 设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 为所求. 因为它们满足 $G(x,y,z)=0$，故 $y(x)$ 与 $z(x)$ 不是独立的. 当 $\dfrac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ 时，由 $G(x,y,z)=0$ 可解出 $z=g(x,y)$，且 z' 可看作 x,y,y' 的函数. 利用关系式

$$G_x + y'G_y + z'G_z = 0$$

或

$$z' = \frac{\partial g}{\partial x} + y'\frac{\partial g}{\partial y}$$

消去 $F(x,y,z,y',z')$ 中的 z 和 z',得到

$$F(x,y,z,y',z') = F\left(x,y,g(x,y),y',\frac{\partial g}{\partial x} + y'\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$= F_1(x,y,y'),$$

这样,满足条件(2.1)和泛函(2.2)的最小问题就化为

$$J[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x,y,y')\,\mathrm{d}x = \min. \tag{2.6}$$

因此,y 必须满足(2.6)的欧拉方程,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'} + F_{z'}\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \left[F_y + F_z\frac{\partial g}{\partial y} + F_{z'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} + y'\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right] = 0, \tag{2.7}$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{z'}\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + F_{z'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}y'\right),$$

将它代入(2.7),化简得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - F_y\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} - F_z\right)\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{2.8}$$

又因为把(2.1)式对 y 求偏导有

$$G_y + G_z\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \tag{2.9}$$

故由(2.8)、(2.9)推得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - F_y\right):\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} - F_z\right) = G_y:G_z, \tag{2.10}$$

把(2.10)式的两内项交换取它们的公比为 $\lambda = \lambda(x)$,即推得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - F_y - \lambda G_y = 0,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} - F_z - \lambda G_z = 0,\end{cases} \tag{2.11}$$

令 $H = F + \lambda G$,则由(2.11)推得(2.5). 证毕.

短程线的一般问题是:在条件

$$G_s(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 \quad (s=1,2,\cdots,p;p<n) \tag{2.12}$$

之下,求 $Y_i(x)$,$x\in[x_0,x_1]$$(i=1,2,\cdots,n)$,使得当 $y_i(x)=Y_i(x)$时有

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x=\min.$$

求解的办法是:构造泛函

$$I[y_1(\cdot),\cdots,y_n(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1} H\mathrm{d}x \quad \left(H=F+\sum_{s=1}^{p}\lambda_s(x)G_s\right). \tag{2.13}$$

由(2.13)的欧拉方程

$$H_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y_i'}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.14}$$

和条件(2.12)以及满足(2.12)的固定边界条件

$$y_i(x_0)=y_{i0},\quad y_i(x_1)=y_{i1} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

求出 $y_i(x)$$(i=1,\cdots,n)$.

例 1 设 $A(x_0,y_0,z_0)$,$B(x_1,y_1,z_1)$是球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \tag{2.15}$$

上的两点,在球面上作光滑曲线连接 A 和 B,构成一个曲线集合 K,从这个集合中求一条曲线,使得弧长$\widehat{AB}$为最短.(这就是有名的测地线问题.)

解 设曲线表示为

$$y=y(x),\quad z=z(x),\quad x\in[x_0,x_1], \tag{2.16}$$

它的弧长是

$$I[y(\cdot),z(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x, \tag{2.17}$$

求测地线是个这样的变分问题:即在条件(2.15)下,求曲线(2.16),使泛函(2.17)为最小.为此,我们构造一个辅助泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}x,$$

它对应的欧拉方程组是

$$\begin{cases} 2\lambda(x)\cdot y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0, \\ 2\lambda(x)\cdot z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0, \end{cases}$$

解这些常微分方程,我们得到依赖于四个常数的曲线族,由条件 $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1, z(x_0)=z_0, z(x_1)=z_1$,确定这些常数,得到要求的测地线是过 A,B 的大圆弧的劣弧段.

这个问题我们也可以利用球面坐标,把它化为参数方程,变成无条件的变分问题来求解. 令

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\quad y = a\sin\theta\sin\varphi,\quad z = a\cos\theta,$$

此时球面上的弧元

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

把 θ 看作独立变量,φ 看作 θ 的函数. 于是,测地线应使

$$I[\varphi(\cdot)] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a\sqrt{1 + \sin^2\theta\cdot\varphi'^2}d\theta = \min.$$

因为上式被积函数中不含 φ,故其欧拉方程有首次积分 $F_{\varphi'}=c$,即

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}} = c, \tag{2.18}$$

从上式解出 φ',我们得到

$$\varphi' = \frac{c}{\sin\theta(\sin^2\theta - c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

显然,从(2.18)可知 $|c|\leqslant 1$. 于是令 $c=\sin\alpha$,代入上式得

$$\varphi' = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

积分得

$$\begin{aligned}\varphi+\beta &= \int\frac{\sin\alpha d\theta}{\sin\theta(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \int\frac{\sin\alpha}{\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

再令 $\cot\theta = u$,则 $du = -\dfrac{d\theta}{\sin^2\theta}, \dfrac{1}{\sin^2\theta} = 1+u^2$,(2.19)式变为

$$\varphi+\beta = -\int\frac{\tan\alpha du}{(1-u^2\tan^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \arccos(u\tan\alpha).$$

于是有

$$\cos(\varphi + \beta) = \tan\alpha \cdot \cot\theta,$$

或写成

$$\sin\theta\cos\varphi \cdot \cos\beta - \sin\theta\sin\varphi\sin\beta = \tan\alpha\cos\theta,$$

换回到 x, y, z 为

$$x\cos\beta - y\sin\beta - z\tan\alpha = 0,$$

这乃是过原点的平面,它与球面的交线,即大圆的劣弧的一段为所求.

§3.3 微分方程作为附加条件

当我们在研究动力学问题时,如果约束方程包含位置坐标,同时也包含速度分量,那么就导出以微分方程为约束条件的变分问题. 在最优控制中,也提出同样的问题. 一般来说,令附加条件为

$$G(x, y, z, y', z') = 0, \tag{3.1}$$

我们称之为非整约束. 当 $G(x, y, z, y', z') = 0$ 不能由另一已知式子 $\overline{\psi}(x, y, z)$ 对 x 的微分得出,也就是说,G 不是一个可积分的微分式时,则这种带有非整约束的变分问题,就非用乘子法不可.

用最优化的表述方式,是

目标函数:泛函

$$I[y(\cdot), z(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\mathrm{d}x = \min; \tag{3.2}$$

约束条件:

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1; \tag{3.3}$$

状态微分方程:

$$G(x, y, z, y', z') = 0$$

在适当光滑的函数空间求解.

我们指出,在§3.1,§3.2 中介绍的乘子法仍然有效,并且可以断定:如果

$$y = y(x), \quad z = z(x) \tag{3.4}$$

满足边界条件(3.3)和附加条件(3.1),使泛函(3.2)取得极小,且设 $G_{y'}$ 和 $G_{z'}$(当 $y = y(x), z = z(x)$)不同时为零,则存在乘子函数 $\lambda(x)$,使逗留函数组(3.4)是泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}[F + \lambda(x)G]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} H\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

对应的微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial H}{\partial y'}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial H}{\partial z'}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

的解.

方程组(3.6)对 y,z 是二阶微分方程,对 $\lambda(x)$ 是一阶微分方程,我们可以由(3.1)和(3.6)组成的微分方程组及边界条件(3.3)解出 $y=y(x), z=z(x)$.

这种问题也可以推广到依赖于 n 个函数 $y_1,\cdots,y_n$ 的泛函

$$I[y_1(\cdot),\cdots,y_n(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

及 m 个非整约束条件

$$G_j(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n') = 0 \quad (j=1,2,\cdots,m) \tag{3.8}$$

的情形,拉格朗日乘子法仍然正确,亦即在某些条件下,若函数 $y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足相应的固定边界条件及非整约束条件,并给泛函(3.7)以极值,则它们应满足泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)G_i\right]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} H\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

对应的微分方程组

$$H_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y_i'} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{3.10}$$

例 1 若泛函

$$J[x_1(\cdot),x_2(\cdot)] = \int_0^1\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right)\mathrm{d}t,$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$$

以微分方程 $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ 作为附加条件,求泛函的极值曲线.

解 令

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \lambda(x_2 - \dot{x}_1),$$

按欧拉方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_1} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_2} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}_2} = 0, \end{cases}$$

我们有

$$\begin{cases} x_1 + \dot{\lambda} = 0, \\ x_2 + \lambda = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -\dot{\lambda}, \\ x_2 = -\lambda, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dot{x}_2, \\ x_2 = \dot{x}_1, \end{cases}$$

这些是两个二阶微分方程

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_1, \\ \ddot{x}_2 = x_2, \end{cases}$$

它们的解是

$$\begin{cases} x_1 = Ae^t + Be^{-t}, \\ x_2 = Ae^t - Be^{-t}, \end{cases}$$

从初值条件

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \dot{x}_1(0) = 1,$$

我们有 $A+B=0$ 和 $A-B=1$,或 $A=\frac{1}{2}$,$B=-\frac{1}{2}$. 因此得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}, \\ x_2 = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}. \end{cases}$$

§3.4 自由边界和自然边界条件

以前各部分所研究的泛函的极值问题,是固定边界(或不动边界)的变分问题,它们的可取函数在端点(或边界)取给定的值. 例如最速降线给定了起点和终点,悬线问题给定了两端悬挂点的坐标等. 但也有许多问题,边界并不是给定的,而是待定的. 例如在有名的弹塑性体问题中,当物体受力之后,在其内部既有弹性区,又有塑性区的时候,弹塑性区的交界面就不是事先给定的. 这就是所谓的待定边界的变分问题. 待定边界的变分问题可分两类,一类是自由边界的变分问题,另一类是变动边界的变分问题. 本节先研究自由边界的变分问题.

我们来研究最简单的变分问题. 设有泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

这里 x_0 和 x_1 是给定的，但它的可取曲线 $y(x)$ 的两个端点可以分别在直线 $x = x_0$ 与 $x = x_1$ 上移动，对函数值并没有作任何假定，参见图 3.4.1，图中的实线、虚线都表示可取曲线.

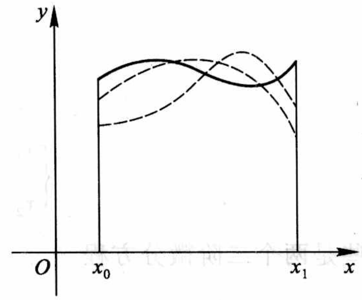


图 3.4.1

讨论的步骤、方法与 §2.2 一样，只是对 $\eta(x)$ 不能利用条件 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$，我们知道，泛函取得极小的必要条件是泛函的一阶变分为零. 由 §2.4 我们有

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right) \delta y \,\mathrm{d}x + F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0. \tag{4.2}$$

我们还断定，对逗留函数来说，欧拉方程仍旧成立. 这是因为，如果已找到了 $y = Y(x)$ 是自由边界变分问题的极小函数，记 $Y(x_0) = y_0, Y(x_1) = y_1$，则 y_0, y_1 是两个固定的常数. 那么，当我们只考虑在区间端点 x_0, x_1 处与 $Y(x)$ 取相同函数值的那些函数 $y(x)$，将它们组成可取函数集合

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x) \in C^{(2)}_{[x_0, x_1]} \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{array} \right\},$$

泛函 $I[y(\cdot)]$ 在可取函数集合 A 上的极小问题，就是我们在 §2.2 中研究过的最简单变分问题，$y = Y(x)$ 也必然是后一问题的逗留函数，因此，根据 §2.2 中同样的理由，就可导出欧拉方程. 这样，一阶变分(4.2)中含有积分的项应等于零，故有

$$F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0,$$

在自由端处，由于 $\delta y \big|_{x = x_1}$ 和 $\delta y \big|_{x = x_0}$ 都是任意的，因而最后获得当端点自由时的边界条件为

$$F_{y'} = 0 \quad (\text{当 } x = x_0 \text{ 及 } x = x_1 \text{ 时}), \tag{4.3}$$

这就是简单泛函的"自然边界条件"，它给出 y 和 y' 在端点处的关系式.

欧拉方程的通解包含两个任意常数，要确定这两个任意常数，需要两个条件，在不动边界问题中，这两个条件是

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$$

对自由边界问题，我们用自然边界条件

$$F_{y'} = 0 \quad (\text{当 } x = x_0 \text{ 和 } x = x_1 \text{ 时})$$

来代替两个固定边界条件，由它们同样可以确定欧拉方程通解中的两个任意常数.

例 1 求泛函

$$I = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y]\,\mathrm{d}x \quad (p(x) \neq 0)$$

的自然边界条件.

解 由 $F = p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y$ 知

$$F_{y'} = 2p(x)y'.$$

对自由边界，极值曲线应满足自然边界条件，即在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 两点有

$$F_{y'} = 2p(x)y' = 0,$$

因为 $p(x) \neq 0$，故自然边界条件是

$$y'\big|_{x=x_0} = 0, \quad y'\big|_{x=x_1} = 0.$$

类似地，对于泛函

$$I(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\,\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

重复上面的讨论，我们得到自由端点的自然边界条件为

$$F_{y_i'}\big|_{x=x_0} = 0 \quad (x_0 \text{ 是自由端点}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{4.5}$$

$$F_{y_i'}\big|_{x=x_1} = 0 \quad (x_1 \text{ 是自由端点}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{4.5$'$}$$

当然，边界条件也可以是，一个端点为固定端点，另一个端点为自由端点. 这时边界条件是固定边界条件与自然边界条件的结合，对固定端点用固定边界条件，对自由端点用自然边界条件. 对含高阶导函数的情形，也有相应的自然边界条件.

下面，我们转向讨论泛函

$$I[u(\cdot, \cdot)] = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.6}$$

在自由边界情况下的自然边界条件. 这里所用的步骤和方法与 §2.7 是一样的，不过这时，$\eta(x, y)\big|_\Gamma$ 是完全任意的，它不能再取零值了，推导仍是应用一阶变分为零，即

$$\delta I = \alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\Phi(\alpha)\bigg|_{\alpha=0}\right) = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I[u + \alpha\eta]_{\alpha=0}$$

$$= \alpha\iint_B (F_u\eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \alpha \iint_B \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\alpha \oint_\Gamma \eta (F_{u_x} \mathrm{d}y - F_{u_y} \mathrm{d}x)$$

$$= \iint_B \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\oint_\Gamma \left(F_{u_x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right) \delta u \mathrm{d}s = 0, \tag{4.7}$$

同样,因逗留函数必须满足欧拉方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0,$$

又由于 δu 的任意性,则由上述的(4.7)式,便可推出自然边界条件为

$$\left(F_{u_x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right)_\Gamma = 0 \quad (\text{这里 } \Gamma \text{ 是 } B \text{ 的边界}), \tag{4.8}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是弧微分. 这就是泛函(4.6)在自由边界情况下的自然边界条件.

例 2 求泛函

$$I[u(\cdot, \cdot)] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2f(x,y)u \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的自然边界条件.

解 先计算一阶变分

$$\delta I = \alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \Phi(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \right) = \alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} I(u + \alpha\eta) \right]_{\alpha=0}$$

$$= -2 \iint_B (\Delta u - f) \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2 \oint_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right) \delta u \mathrm{d}s,$$

泛函 I 取得极值的必要条件是其逗留函数必须满足欧拉方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in B,$$

由一阶变分必须为零,以及 δu 的任意性,得所求的自然边界条件是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right)_\Gamma = 0, \tag{4.9}$$

因为 $\mathrm{d}x = \cos \alpha \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}y = \sin \alpha \mathrm{d}s$(这里 α 为边界 Γ 上一点切线的倾角,参看图 3.4.2 的微分三角形),代入(4.9)式,故有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)_{\Gamma} = 0. \tag{4.10}$$

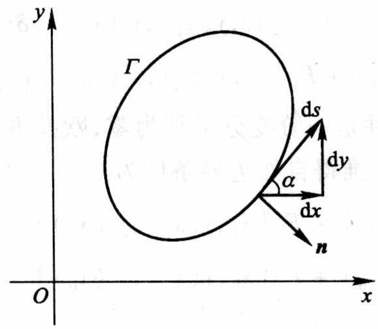


图 3.4.2

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha,\end{aligned}$$

(4.10)式可化为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{4.11}$$

本例的自然边界条件是第二类边界条件.

自然边界条件这个概念之所以有意义,在于我们很容易把它用于较为一般类型的变分问题,包括那些明显含有边值问题在内的变分问题. 作为这一节的结束,我们考虑两个更一般的变分问题.

第一个变分问题的泛函是

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x - \varphi(y_0) + \psi(y_1), \tag{4.12}$$

其中 y_0 和 y_1 是函数 $y(x)$ 在区间端点所取的值,这些值并不是事先给定的,而 φ,ψ 为已知函数. 设 $y(x)$ 是(4.12)取得极小的解. 在研究 $y(x)$ 的同时,我们研究其邻近曲线 $y(x)+\alpha\eta(x)$. 将其代入泛函(4.12),对 α 微分并令 $\alpha=0$,就得下面的一阶变分

$$\begin{aligned}\delta I = &\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x + F_{y'}\delta y\,\big|_{x=x_1} - F_{y'}\delta y\,\big|_{x=x_0} - \\ &\varphi'(y_0)\delta y\,\big|_{x=x_0} + \psi'(y_1)\delta y\,\big|_{x=x_1}\end{aligned}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right) \delta y \mathrm{d}x +$$

$$\{ \psi'(y_1) + F_{y'}[x_1, y(x_1), y'(x_1)] \} \delta y_1 -$$

$$\{ \varphi'(y_0) + F_{y'}[x_0, y(x_0), y'(x_0)] \} \delta y_0 ,$$

泛函取得极值的必要条件是一阶变分必须为零,欧拉方程仍应满足. 又由于 δy, δy_0 及 δy_1 的任意性,我们推得自然边界条件为

$$\psi'(y_1) + F_{y'}[x_1, y(x_1), y'(x_1)] = 0, \tag{4.13}$$

$$\varphi'(y_0) + F_{y'}[x_0, y(x_0), y'(x_0)] = 0. \tag{4.14}$$

第二个变分问题的泛函是

$$I[u] = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \oint_\Gamma \Phi(s, u, u_s) \mathrm{d}s, \tag{4.15}$$

其中 Γ 为区域 B 的边界, $\mathrm{d}s$ 为 Γ 的弧微分, Φ 为已知函数, u, u_s 在 Γ 上不是事先给定的. 进行类似的计算,得出(4.15)的一阶变分为

$$\delta I = \iint_B \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) \delta u \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \oint_\Gamma \left(F_{u_x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right) \delta u \mathrm{d}s +$$

$$\oint_\Gamma \left(\Phi_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Phi_{u_s} \right) \delta u \mathrm{d}s, \tag{4.16}$$

和前面一样,一阶变分必须为零,欧拉方程仍应满足,又由于 δu 在 Γ 上的任意性,推出自然边界条件

$$\left(F_{u_x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \Phi_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Phi_{u_s} \right)_\Gamma = 0.$$

例 3 求

$$I[u] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y +$$

$$\oint_\Gamma [\sigma(s) u^2 - 2\varphi(s) u] \mathrm{d}s = \min \tag{4.17}$$

的自然边界条件,其中 $f = f(x, y)$ 是已知函数.

解 (4.17)的一阶变分为零,即

$$\delta I = -2 \iint_B (\Delta u - f) \delta u \mathrm{d}x \mathrm{d}y - 2 \oint_\Gamma \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right) \delta u \mathrm{d}s +$$

$$2 \oint_\Gamma [\sigma(s) u - \varphi(s)] \delta u \mathrm{d}s, \tag{4.18}$$

其自然边界条件为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\sigma(s)u-\varphi(s)\right]_{\Gamma}=0,$$

即

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u\right]_{\Gamma}=\varphi(s). \tag{4.19}$$

一般说来,我们可以通过在泛函中加边界条件或边界积分的办法,在不改变欧拉方程的前提下,使自然边界条件有很大改变.

对泛函(4.15)我们可以给予物理解释,$\iint_B F\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示应变能与外力做的功,而$\int_{\Gamma}\Phi(s,u,u_s)\mathrm{d}s$ 表示边界力所做的功.

§3.5 一阶变分的一般形式

作为下一节变动边界与横截条件的准备,我们先给出一阶变分的一般形式.我们曾在§2.4给出的泛函的一阶变分,此后,常用一阶变分这个概念.但在确定各种泛函的一阶变分时,总是假设泛函表示式的积分区间是不变的.现在我们取消这个不变的假设.考虑积分限是变动的,可取曲线的端点也是变动的.首先让我们来讨论下面的泛函

$$I[y(\cdot,\alpha)]=\int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)}F[x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)]\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

设当 $\alpha=0$ 时,$x_0(0)=\bar{x}_0, x_1(0)=\bar{x}_1, y(x,0)=Y(x)$①$(x\in[\bar{x}_0,\bar{x}_1])$,且设 $Y(x)$ 给出泛函(5.1)的极小值.

按照一般的定义,以 α 为参变量的泛函或函数的变分是该泛函或函数对 α 的导数在 $\alpha=0$ 的值与 α 的乘积,于是有

$$\delta x_0=\left.\frac{\mathrm{d}x_0(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha,$$

$$\delta x_1=\left.\frac{\mathrm{d}x_1(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha,$$

$$\delta y=\left.\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha,$$

$$\delta y'=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\right]\bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y.$$

---

① $y(x,\alpha)$是 $Y(x)$邻近函数的一般形式.

为了说明一阶变分的一般形式，先复习含参变量积分对参变量的求导法则. 设

$$\phi(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F(x,\alpha)\mathrm{d}x,$$

则有

$$\phi'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x + F[b(\alpha),\alpha]b'(\alpha) - F[a(\alpha),\alpha]a'(\alpha).$$

由此法则，我们得到泛函(5.1)的一阶变分的表达式为

$$\begin{aligned}\delta I &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I[y(\cdot,\alpha)]\right\}_{\alpha=0}\cdot\alpha \\ &= F(\bar{x}_1,Y_1,Y_1')\delta\bar{x}_1 - F(\bar{x}_0,Y_0,Y_0')\delta\bar{x}_0 + \\ &\quad\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}(\bar{F}_y\delta y + \bar{F}_{y'}\delta y')\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5.2}$$

或

$$\delta I = [F(x,Y,Y')\delta x]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} + \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}(\bar{F}_y\delta y + \bar{F}_{y'}\delta y')\mathrm{d}x, \tag{5.2$'$}$$

照惯例，用分部积分法将被积分式的第二项变形，则有

$$\begin{aligned}\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\bar{F}_{y'}\delta y'\mathrm{d}x &= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\bar{F}_{y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\mathrm{d}x \\ &= F_{y'}(\bar{x}_1,Y_1,Y_1')\delta\bar{y}_1 - F_{y'}(\bar{x}_0,Y_0,Y_0')\delta\bar{y}_0 - \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{F}_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $\delta\bar{y}_1$ 及 $\delta\bar{y}_0$ 都是函数 $y(x,\alpha)$ 变分的边界值，即

$$\delta\bar{y}_i = \left[\frac{\partial y(x_i,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha \quad (i=0,\ 1). \tag{5.4}$$

令

$$y_i = y[x_i(\alpha),\alpha] \quad (i=0,1),$$

当 α 改变时，函数 y_i 中的两个变量都在改变，以右端点为例，有

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}y[x_1(\alpha),\alpha]\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha \\ &= \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\alpha=0}\cdot\alpha + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha\end{aligned}$$

$$= Y_1'\delta x_1 + \delta \bar{y}_1, \tag{5.5}$$

其中 y_1' 是曲线在其右端点处的切线的斜率. 同样得到曲线左端点的纵坐标的变分为

$$\delta y_0 = Y_0'\delta x_0 + \delta \bar{y}_0, \tag{5.6}$$

将(5.3)式中的 $\delta \bar{y}_1$ 及 $\delta \bar{y}_0$ 用(5.5)及(5.6)中它们的表示式代入,得到泛函(5.1)的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta I =& [F(\bar{x}_1, Y_1, Y_1') - Y_1'F_{y'}(\bar{x}_1, Y_1, Y_1')]\delta \bar{x}_1 + F_{y'}(\bar{x}_1, Y_1, Y_1')\delta \bar{y}_1 - \\ & [F(\bar{x}_0, Y_0, Y_0') - Y_0'F_{y'}(\bar{x}_0, Y_0, Y_0')]\delta \bar{x}_0 - F_{y'}(\bar{x}_0, Y_0, Y_0')]\delta \bar{y}_0 + \\ & \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\left(\bar{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{F}_{y'}\right)\delta y \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5.7}$$

即

$$\delta I = [(\bar{F} - Y'\bar{F}_{y'})\delta x + \bar{F}_{y'}\delta y]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} + \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\left(\bar{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{F}_{y'}\right)\delta y \mathrm{d}x.$$

因而,泛函(5.1)的一阶变分的一般形式为

$$\begin{aligned}\delta I =& [(F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y'))\delta x + F_{y'}(x,y,y')\delta y]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} + \\ & \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\left[F_y(x,y,y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y,y')\right]\delta y \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.7$'$}$$

类似地,对于积分上下限随 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 而变,且依赖于 n 个函数的泛函

$$I[y_1(\cdot), \cdots, y_n(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\mathrm{d}x, \tag{5.8}$$

用

$$\delta I = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0} \cdot \alpha_i$$

求出泛函(5.8)的一阶变分的一般形式是

$$\begin{aligned}\delta I =& \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i'F_{y_i'}\right)_{x=\bar{x}_1}\delta \bar{x}_1 + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\big|_{x=\bar{x}_1}\delta \bar{y}_{i1} - \\ & \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i'F_{y_i'}\right)_{x=\bar{x}_0}\delta \bar{x}_0 - \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\big|_{x=\bar{x}_0}\delta \bar{y}_{i0} + \\ & \sum_{i=1}^{n}\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}\right)\delta y_i \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5.9}$$

或

$$\delta I = \left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'} \right) \delta x + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_i \right]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'} \right) \delta y_i \mathrm{d}x, \tag{5.9)'$$

其中 $\delta \bar{x}_0, \delta \bar{x}_1, \delta \bar{y}_{i0}, \delta \bar{y}_{i1}$ 是曲线在端点的坐标的变分.

在前面的推导中,我们引进了 δy_i 及 $\delta \bar{y}_i (i=0,1)$ 两个有不同含义的函数 y 的变分符号. 现在我们来几何直观地说明 δy_i 与 $\delta \bar{y}_i$ 的区别. 可取曲线 $y=y(x,\alpha)$ 的右端点的坐标是 $x_1(\alpha)$ 及 $y_1(\alpha)=y[x_1(\alpha),\alpha]$,当 α 改变时,右端点描出某一曲线 (l),α 是曲线的参数,且 α 的始值是 $\alpha=0$,按照(5.5)式,δy_1 是函数 $y_1(\alpha)=y[x_1(\alpha),\alpha]$ 关于变量 α 在 $\alpha=0$ 处的微分,亦即 δy_1 是右端点的纵坐标的改变量的主要部分. 在图 3.5.1 中这改变量用线段 CD 来表示. 按照(5.4)式 $\delta \bar{y}_1$ 是函数 $y[x_1(0),\alpha]$ 关于 α 的微分,即在计算微分以前就在第一变数 $x_1(\alpha)$ 内令 $\alpha=0$,这样一来,$\delta \bar{y}_1$ 是当曲线 $y=y(x,\alpha)$ 时端点 $x_1(0)$ 的纵坐标的改变量的主要部分,在图 3.5.1 中,这一改变量是由线段 AB 来表示的,并且 $\delta y_1/\delta x_1$ 是曲线 (l) 在 $\bar{x}_1$ 处的斜率.

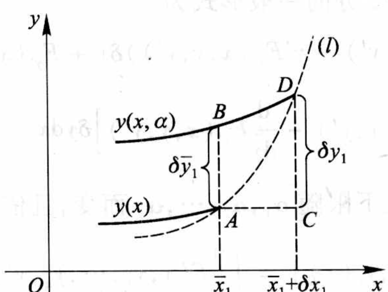


图 3.5.1

对于二维(或多维)的情形,当积分区域 B 固定时,由 §3.4(4.7)式知,泛函

$$I[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B F(x,y,u,u_x,u_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.10}$$

的一阶变分为

$$\delta I = \iint_B \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\oint_\Gamma \left(F_{u_x} \frac{\partial x}{\partial n} + F_{u_y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \delta u \mathrm{d}s,$$

这里 Γ 是区域 B 的边界,$\mathrm{d}s$ 是 Γ 上的弧微分. 当 B 是变区域时,类似可以推得

泛函(5.10)的一阶变分的一般形式为

$$\delta I=\iint_B\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\oint_\Gamma\left(F_{u_x}\frac{\partial x}{\partial n}+F_{u_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\delta\bar{u}\mathrm{d}s+$$

$$\oint_\Gamma F\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial n}\delta x+\frac{\partial y}{\partial n}\delta y\right)\mathrm{d}s,\tag{5.11}$$

其中 n 为 Γ 的外向法,$\delta\bar{u}$的意义和 $\delta\bar{y}$的意义相似.(5.11)式中右边的第一、二项是区域固定时 u 改变而产生的,而第三项可以认为是由于区域变动而产生的.

§3.6 变动边界问题与横截条件

在讨论自然边界问题时,我们曾假设可取曲线的端点在直线 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 上移动.实际问题需要我们进一步地推广,允许 x_0,x_1 是变化的.例如我们寻求两曲面

$$z=\varphi(x,y)\text{ 和 }z=\psi(x,y)$$

之间的最短距离.用数学公式表示为:求一曲线 $y=y(x),z=z(x)$,使

$$I[y(\cdot),z(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x=\min.\tag{6.1}$$

其条件是可取曲线的一个端点(x_0,y_0,z_0)在曲面 $z=\varphi(x,y)$上,即满足 $z_0=\varphi(x_0,y_0)$,而另一端点在另一曲面 $z=\psi(x,y)$上,满足 $z_1=\psi(x_1,y_1)$.这样,泛函 $I[y(\cdot),z(\cdot)]$的积分表示式的上下限 x_0,x_1 相对应的点分别在曲面 φ 和 ψ 上变动.又如求两条曲线间的最短距离,也可以作为这类问题的另一个例子.

现在,我们先研究可取曲线的(一个或两个)端点在平面曲线上移动的情况.设已知泛函为

$$I[y(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,\tag{6.2}$$

它的可取曲线的端点 P_0 和 P_1 分别位于两条曲线 $y=\varphi(x)$和 $y=\psi(x)$上.现在,我们寻求这类泛函的极值.利用上节得到的公式,则泛函(6.2)的一般形式的一阶变分为

$$\delta I=\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\left[(F-y'F_{y'})\delta x+F_{y'}\delta y\right]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}.\tag{6.3}$$

如果可取函数集合中的某一函数 $y=y(x)$，使得泛函(6.2)取得极值，根据与自然边界问题同样的理由，则它应满足欧拉方程，于是(6.3)中含积分的项等于零. 泛函取得极值，一阶变分必须为零，故(6.3)式变为

$$\delta I=\left[(F-y'F_{y'})\delta x+F_{y'}\delta y\right]_{x=\bar{x}_1}-\left[(F-y'F_{y'})\delta x+F_{y'}\delta y\right]_{x=\bar{x}_0}=0. \tag{6.4}$$

为简单起见，我们先假定左边的端点固定，而右边的端点在某一曲线 $y=\psi(x)$ 上移动. 这样，由于在(6.4)中 $\delta x\big|_{x=\bar{x}_0}=0$，$\delta y\big|_{x=\bar{x}_0}=0$，因此有

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=\bar{x}_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=\bar{x}_1}\delta y_1=0.$$

其中 δx_1 及 δy_1 是沿曲线 $y=\psi(x)$ 的无穷小位移在坐标轴上的投影，故可用 $\overline{y'}=\dfrac{\delta y_1}{\delta x_1}$ 表示曲线 $y=\psi(x)$ 的切线斜率. 因此上式可以写成

$$\left[F(x,y,y')+(\overline{y'}-y')F_{y'}(x,y,y')\right]_{x=\bar{x}_1}\delta x_1=0, \tag{6.5}$$

由于 δx_1 的任意性，且有 $\overline{y'}=\psi'(x)$，故得

$$\left[F(x,y,y')+(\psi'(x)-y')F_{y'}(x,y,y')\right]_{x=\bar{x}_1}=0. \tag{6.6}$$

这一关系式建立了极值曲线的切线斜率和端点移动时所沿的曲线 $y=\psi(x)$ 的切线斜率之间的联系，因此，我们称(6.6)为横截条件.

如果右端点所沿的曲线是以隐函数的形式 $g(x,y)=0$ 给出，则条件(6.6)即为

$$\left\{\left[F(x,y,y')-y'F_{y'}(x,y,y')\right]g_y-F_{y'}(x,y,y')g_x\right\}_{x=\bar{x}_1}=0. \tag{6.7}$$

现在，让我们回到开始所假定的左、右两端点分别在曲线 $y=\varphi(x)$ 和 $y=\psi(x)$ 移动的情形，这时因为 $\dfrac{\delta y_0}{\delta x_0}=\varphi'(x)$，$\dfrac{\delta y_1}{\delta x_1}=\psi'(x)$，所以，(6.4)式即变成

$$\delta I=(F-y'F_{y'}+F_{y'}\psi')_{x=\bar{x}_1}\delta x_1-(F-y'F_{y'}+F_{y'}\varphi')_{x=\bar{x}_0}\delta x_0=0,$$

因为 δx_1 和 δx_0 是独立的变分，由此我们得到

$$(F_{y'}\psi'+F-y'F_{y'})_{x=\bar{x}_1}=0,$$

$$(F_{y'}\varphi'+F-y'F_{y'})_{x=\bar{x}_0}=0,$$

$$\left[F+F_{y'}(\psi'-y')\right]_{x=\bar{x}_1}=0,$$

$$\left[F+F_{y'}(\varphi'-y')\right]_{x=\bar{x}_0}=0,$$

这两个条件仍叫横截条件. 当 $y=y(x)$ 满足这些条件时，我们就说 $y(x)$ 与曲线

$\varphi(x)$和$\psi(x)$横交.

图 3.6.1 给出 $\delta x_i,\delta y_i(i=0,1)$,$\delta y$ 及横交条件的几何表示.

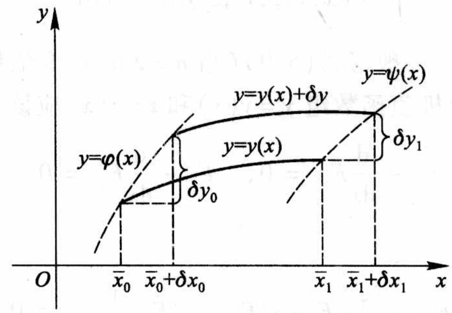


图 3.6.1

这样,为了求解带变动端点的变分问题,需要首先写出并求解对应的欧拉方程,然后再由横截条件确定出通解中两个任意常数.

在变分学问题中,常常遇到形如

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.8}$$

的泛函. $f(x,y)$几乎处处不为0,这类泛函的横截条件显得特别简单,事实上,在这种情况下

$$F_{y'}=f(x,y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{y'f}{\sqrt{1+y'^2}},$$

因此,横截条件是

$$F+F_{y'}(\psi'-y')=\frac{f(x,y)(1+y'\psi')}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

由此推得

$$y'=-\frac{1}{\psi'}.$$

类似地,在另一个端点有

$$y'=-\frac{1}{\varphi'}.$$

即对于泛函(6.8),横截条件归结为正交性条件.

对于依赖于多个函数的泛函,同样可以研究变动边界的问题. 例如,在两个函数的情况下,这个问题可以叙述如下:

在端点位于两个固定的曲面 $x=\varphi(y,z)$ 和 $x=\psi(y,z)$ 上的所有曲线中,找

出一组曲线,它使得

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,\mathrm{d}x = \min.$$

利用上一节一阶变分的一般形式(5.9)(当 $n=2$ 时),像依赖于一个函数的泛函类似地推导,可以推得极值函数组 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 应该适合欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0,\quad F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0.$$

在端点它应满足条件

$$\left[F_{y'} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\right]_{x=\bar{x}_0} = 0,$$

$$\left[F_{z'} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\right]_{x=\bar{x}_0} = 0;$$

$$\left[F_{y'} + \frac{\partial\psi}{\partial y}(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\right]_{x=\bar{x}_1} = 0,$$

$$\left[F_{z'} + \frac{\partial\psi}{\partial z}(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\right]_{x=\bar{x}_1} = 0.$$

这些条件同样称为横截条件.

与泛函(6.8)的情形类似,我们不难证明,对泛函

$$I[y(\cdot),z(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x, \tag{6.9}$$

如果要求它的可取曲线 $y=y(x)$,$z=z(x)$ 的一个端点 $x=x_1$ 在曲面 $z=\varphi(x,y)$ 上变动,则这个端点满足的横截条件就是正交条件

$$\frac{1}{\varphi_x} = \frac{y'}{\varphi_y} = \frac{z'}{-1},$$

泛函(6.8)是泛函(6.9)的特殊情况. 当然,它的横截条件是正交条件.

例1 求泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x$$

的极值曲线,使其一个端点固定在(0,0)处,另一个端点在 $y=x-5$ 上变动.

解 不难求出其欧拉方程的通解为 $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$,其中 c_1,c_2 为任意常数. 由固定端点(0,0)得出 $c_2=\pm c_1$,故有 $(x-c_1)^2+y^2=c_1^2$,由另一端的横截条件,对此题而言就是正交条件. 所以该圆的圆心应在直线 $y=x-5$ 上,则圆心为(5,0),因此极值曲线为

$$(x-5)^2+y^2=25, \text{或 } y=\pm\sqrt{10x-x^2}.$$

如图 3.6.2.

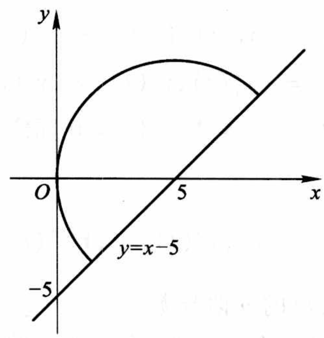


图 3.6.2

§3.7　隐泛函取得极值的必要条件[①]

1．问题的提出

J. B. Keller 提出了有名的赛跑问题. 在时间间隔 $[0,T]$ 秒内，运动员跑过的距离为

$$D=\int_0^T v\mathrm{d}t, \tag{7.1}$$

这里 v 是一个依赖于时间 t、运动员前进冲力 $F(t)$、运动员血液对单位肌肉的供氧量 $E(t)$ 及阻力 $R(t)$ 的速度函数. 但是这里的 T 并不是一个常量，它是依赖于 $F(t)$，$E(t)$ 以及 $R(t)$ 的泛函，D 是一个常数，这样(7.1)式中的泛函就不像以前提到的泛函，称它为隐泛函. 问题是如何安排整个运动过程中的速度函数，使得在距离 D 一定时 T 最小.

类似于上述的极值问题称为隐泛函的极值问题. 下面将研究隐泛函取得极值的必要条件. 一般称泛函

$$\int_0^{T[y(\cdot)]} F(t,y(t),y'(t))\mathrm{d}t=c \tag{7.2}$$

为隐泛函，其中 c 为常数. $t=0$ 是 $y(t)$ 的固定端($y(t)\big|_{t=0}=y_0$).

很容易把上述问题推广到依赖于多个函数的隐泛函或依赖于高阶导数的隐泛函上去. 如

① 这是作者 1985 年完成的一篇论文，见工程数学学报 Vol. 3, No. 2, 1986.

$$\int_0^{T[\boldsymbol{Y}(\cdot)]} F(t,\boldsymbol{Y}(t),\boldsymbol{Y}'(t))\mathrm{d}t = c, \tag{7.3}$$

这里

$$\boldsymbol{Y}(t) = (y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)),$$
$$\boldsymbol{Y}'(t) = (y_1'(t),y_2'(t),\cdots,y_n'(t)),$$
$$\boldsymbol{Y}(t)\big|_{t=0} = \boldsymbol{Y}_0 \quad (t = 0 \text{ 固定}),$$

还可以推广到

$$\int_0^{T[\boldsymbol{Y}(\cdot)]} F[t,\boldsymbol{Y}(t),\boldsymbol{Y}'(t),\cdots,\boldsymbol{Y}^{(n)}(t)]\mathrm{d}t = c, \tag{7.4}$$

其中 $\boldsymbol{Y}^{(n)}(t)$是矢量函数 $\boldsymbol{Y}(t)$的 n 阶导数.

隐泛函(7.2)或(7.3)的变分问题为,在可取函数空间中求 $y(t)$或 $\boldsymbol{Y}(t)$,使 $T[y(\cdot)]$或 $T[\boldsymbol{Y}(\cdot)]$取得极值.

2. 必要条件

我们先研究(7.2)取得极值的必要条件.

设 $Y(t)$使(7.2)取得极值,即

$$\min T[y(\cdot)] = T[Y(\cdot)],$$

我们把 $Y(t)$嵌入到它的邻近可取函数集合

$$y(t) = Y(t) + \alpha\eta(t) \tag{7.5}$$

中,其中 $\eta(t)$满足 $\eta(0)=0$,是具有一阶连续偏导数的任意函数,把(7.5)代入(7.2)有

$$\int_0^{T[Y(\cdot)+\alpha\eta(\cdot)]} F[t,Y(t)+\eta(t)\alpha,Y'(t)+\eta'(t)\alpha]\mathrm{d}t = c, \tag{7.6}$$

对 t 积分后,(7.6)式表示 T,α 的隐泛函,显然当 $\alpha=0$ 时隐泛函取得极值,即隐函数 $T[y(\cdot)]$取得极值 $T[Y(\cdot)]$,设

$$T[Y(\cdot)] = T_0.$$

我们求(7.2)的一阶变分. 按变分的定义,把(7.6)式两边对 α 求导,令 $\alpha=0$ 再乘 α,有

$$\left\{\int_0^{T[Y(\cdot)+\alpha\eta(\cdot)]}[F_y\cdot\eta(t) + F_{y'}\eta'(t)]\mathrm{d}t + F[t,Y+\alpha\eta(t),Y'(t)+\alpha\eta'(t)]\Big|_{t=T_0}\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha = 0,$$

即

$$\left\{\int_0^{T_0}(\overline{F}_y\delta y + \overline{F}_{y'}\delta y')\mathrm{d}t + F(t,Y(t),Y'(t))\Big|_{t=T_0}\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\alpha = 0,$$

其中$\overline{F}_y = F_y(t, Y, Y')$ $\overline{F}_{y'} = F_{y'}(t, Y, Y')$，用分部积分法改变被积式的第二项，得

$$\int_0^{T_0}\left(\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{F}_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}t + \overline{F}_{y'}\delta y\Big|_0^{T_0} + F(t,Y(t),Y'(t))\Big|_{t=T_0}\delta T = 0.$$

泛函取得极值的必要条件是：

泛函的一阶变分：

$$\delta T = 0,$$

欧拉方程仍应满足：

$$\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{F}_{y'} = 0, \tag{7.7}$$

满足相应的边界条件：

$$y(0) = y_0, \tag{7.8}$$

及

$$F_{y'}(t,y,y')\Big|_{t=T_0} = 0. \tag{7.9}$$

由此，我们推得

定理 1 设 $F(t,y,y')$是三个独立变量的已知函数，且具有二阶连续偏导数. 如果函数 $Y(t)$使隐泛函(7.2)取得极值，那么，它必须是欧拉方程(7.7)的解，且满足条件(7.8)，(7.9).

根据类似的推导，对(7.3)式两边求变分，有

$$\int_0^{T_0}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{F}_{y_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{F}_{y_k'}\right)\delta y_k\right]\mathrm{d}t + \left(\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{y_k'}\delta y_k\right)_0^{T_0} + F(t,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}')\Big|_{t=T_0}\delta T = 0$$

$$(k = 1,2,\cdots,n),$$

可得

定理 2 设 $F(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')$对三个变元有二阶连续偏导数. 如果 $\boldsymbol{Y}(t)$使隐泛函(7.3)取得极值，那么它必须是欧拉方程组

$$F_{y_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y_k'} = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{7.10}$$

的解，且满足边界条件：

$$\begin{aligned} &y_k(0) = y_k && (k = 1,2,\cdots,n),\\ &F_{y_k'}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')\Big|_{t=T_0} = 0 && (k = 1,2,\cdots,n). \end{aligned} \tag{7.11}$$

不难推导出隐泛函(7.4)取得极值的必要条件.

*§3.8 标枪投掷的数学模型[1]

1. 问题综述

长期以来断断续续有人用数学、物理、力学研究体育运动. 但用现代数学、物理、力学与计算机研究体育运动是从 20 世纪 70 年代开始，1973 年美国著名的应用数学家 J. B. Keller 发表了赛跑的理论，并用他的理论训练中、长跑运动员，取得了很好的成绩；几乎同时，美国计算机专家艾尔斯用力学、数学与计算机，研究了当时铁饼世界冠军的投掷技术，训练并改正他的投掷技术，使这位世界冠军在短期内，投掷成绩提高 4 m，并在一届奥运会比赛中，取得了三破世界纪录的辉煌成绩；T. C. Soong 相继发表了《标枪的动力学》(1975 年)与《铁饼的动力学》(1976 年)两篇论文. 至 20 世纪 80 年代初，国内也有人注意到这个新的领域，对标枪投掷技术进行了定量的研究. 一般把标枪看作刚体，考虑它在运动中受到空气阻力 R、升力 L 与重力 mg 的作用，阻力、升力作用在标枪 AB 的形心 M(几何形状中心)上，而重力作用在质心 P 上. 设 $P(x,y)$ 是运动标枪轨迹上的动点，过 P 点作标枪运动轨迹的切线的倾角为 α，标枪轴线与 x 轴的夹角为 θ，称 $\theta-\alpha$ 为攻角. 偏心距 $|MP|=e$，$|MB|=l$(约标枪长的一半). 忽略风力的影响，标枪在一铅直平面内运动，如图 3.8.1 的曲线表示标枪质心的运动轨迹.

如图 3.8.1 所示，x 轴与 y 轴分别表示水平线与铅直线，AB 表示运动的标枪.

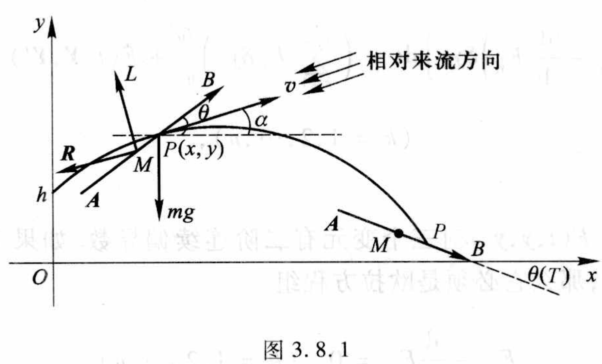


图 3.8.1

由理论力学知，标枪运动的微分方程组为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -R\cos\alpha - L\sin\alpha, \\ m\ddot{y} &= -R\sin\alpha + L\cos\alpha - mg, \\ I\ddot{\theta} &= -e[R\sin(\theta-\alpha) + L\cos(\theta-\alpha)], \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

---

① 这是作者研究标枪投掷的一篇综合论文.

其中 $\alpha=\arctan\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$，$m$，$I$ 分别表示标枪的质量与绕质心 P 在 xOy 坐标面内的转动惯量，由空气动力学知阻力 R 与速度方向相反，大小是

$$R=\frac{1}{2}c_{df}\cdot\rho\cdot S_f(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\cos^2(\theta-\alpha), \tag{8.2}$$

升力垂直速度，指向标枪上侧，大小是

$$L=\frac{1}{2}c_{dp}\cdot\rho\cdot S_p(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\sin^2(\theta-\alpha), \tag{8.3}$$

这里 c_{df}，c_{dp} 分别表示阻力系数、升力系数，ρ，S_f，S_p 分别表示空气的密度、标枪的表面积与轴截面的面积. 标枪运动微分方程组的初值条件是

$$\left.\begin{array}{ll}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\big|_{t=0}=V_0^2, & \alpha\big|_{t=0}=\alpha_0,\\ x\big|_{t=0}=0, & y\big|_{t=0}=h,\\ \theta\big|_{t=0}=\theta_0, & \dot{\theta}\big|_{t=0}=\omega_0,\end{array}\right\} \tag{8.4}$$

其中 V_0，h 分别表示标枪的初始速度与出手高度，α_0 是初速度矢量与 x 轴间的夹角，θ_0 为标枪出手时它与 x 轴的夹角.

2. 标枪运动的最佳轨道的数学模型

标枪运动是一项复杂运动，影响运动员投掷远近的因素很多，不仅与运动员的身体素质、竞技状态、投掷技术有关，而且自然条件、气候、风速、标枪器械对运动员投掷的远近也有明显影响. 我们暂不考虑风速影响. 参数 V_0，h，θ_0，α_0 等与运动员的身体素质、投掷技术有关. 物理几何参数 m，S_f，S_p，e 等都影响标枪投掷的远近. 如果微分方程组所含参数、初值条件发生变化，则标枪的轨迹也将随之而变，投掷远近有所不同. 上述现象的本质是微分方程组的解对初值条件和所含参数的依赖，不难证明：

（1）当初值条件(8.4)给出后，微分方程组(8.1)的解存在唯一；

（2）微分方程组(8.1)的解对其所含参数有连续的偏导数；

（3）微分方程组(8.1)的解对初始值有连续的偏导数.

标枪投掷的水平距离：

$$J=\int_0^T\dot{x}\,\mathrm{d}t+(l-e)\cos\theta(T), \tag{8.5}$$

这里 T 是标枪飞行的时间，$\theta(T)$ 是标枪着地时与地面的交角. 为保证枪头着地，要求满足终点条件

$$\theta(T)\leqslant-\frac{\pi}{30}(\text{一个小交角}), \tag{8.6}$$

$$y(T) = (l - e)\sin\theta(T). \tag{8.7}$$

我们称把标枪投掷最远的轨迹为最佳轨道. 现在的问题是如何选对标枪的几何、物理参数及初值条件,使运动员投得最远,投出最佳轨道,取得最好成绩.

最佳轨道的数学模型是:

目标函数: $J = \int_0^T \dot{x}\mathrm{d}t + (l - e)\cos\theta(T) = \max$;

状态方程: 微分方程组(8.1);

初值条件: (8.4);

终点条件: (8.6),(8.7).

3. 求解与讨论

我们把微分方程组(8.1)用向量的一阶方程组的形式来表示. 记 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^{\mathrm{T}}$,依次用它的分量表示 $x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}$,则方程组(8.1)转换为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6), \tag{8.1$'$}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= x_2,\\
f_2 &= \left[-R\cos\left(\arctan\frac{x_4}{x_2}\right) - L\sin\left(\arctan\frac{x_4}{x_2}\right)\right]\Big/ m,\\
f_3 &= x_4,\\
f_4 &= \left[-R\sin\left(\arctan\frac{x_4}{x_2}\right) + L\cos\left(\arctan\frac{x_4}{x_2}\right)\right]\Big/ m - g,\\
f_5 &= x_6,\\
f_6 &= -e\left[R\sin\left(x_5 - \arctan\frac{x_4}{x_2}\right) + L\cos\left(x_5 - \arctan\frac{x_4}{x_2}\right)\right]\Big/ I,
\end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

初值条件:

$$\boldsymbol{X}\big|_{x=0} = \boldsymbol{X}_0 = (0, V_0\cos\alpha_0, h, V_0\sin\alpha_0, \theta_0, \omega_0)^{\mathrm{T}}. \tag{8.4$'$}$$

当初始值和参数都给定后,我们可以用龙格 - 库塔(Runge-Kutta)法求出 $\boldsymbol{X}(x)$ 的数值解,可以计算出标枪着地时质心 P 的水平位移 $x_1(T)$,这里 T 是标枪飞行的时间. 这样,可以断定 J 是参数与初值条件的函数,令

$$S = -J,$$

S 也是参数、初值条件的函数,为了计算简单起见,每次考察参数、初值条件仅含

3 个变数，重复用合形法计算，找出影响标枪投掷大的参数或初始数据. 这样我们得到标枪投掷与构造的优化模型为：

目标函数：$S(e,\theta_0,\alpha_0)=\min$；

状态方程：(8.8)；

初值条件：(8.4)′；

终点条件：
$$x_5(T)+\frac{\pi}{30}=0, \tag{8.6$'$}$$
$$x_3(T)=(l-e)\sin(x_5(T)); \tag{8.7$'$}$$

约束条件：　$a_1\leqslant e\leqslant b_1, a_2\leqslant\theta_0\leqslant b_2, a_3\leqslant\alpha_0\leqslant b_3$.

目标函数 $S(e,\theta_0,\alpha_0)$ 用算法语言来表示，采用复合型算法. 取参数：

$m=808$ g,　　$I=440\ 000$ g·cm/s^2,

$S_f=1\ 970.37$ cm^2,　　$S_p=626.49$ cm^2,

$c_{df}=0.000\ 073\ 563\ 263$,　　$c_{dp}=0.030\ 143\ 156\ 649$,

$l=120.11$ cm,

$\overline{T}$（绝对温度）$=293$ K,　　$P=1\ 013\times10^6$ dyn/cm^2,

$\mu=29$ g/mol,　　$\rho=\dfrac{\mu P}{R\overline{T}}$,

$R=8.31\times10^7$ erg/mol·℃.

（1）我们用优化程序，用国内 5 名运动员实测的数据在 V_0,h,I,ρ,S_f,S_p 等不变的情况下，选择合适的参数 e，并用适当的角度 θ_0,α_0 去投，这 5 名运动员的成绩增加 7～15 m.

（2）对 1972 年世界亚军实测的数据实测速度的大小，优选投掷角度 θ_0、适当的角度 α_0 及 e，这位世界亚军的成绩可从 90.47 m 提高到 111 m，约增加 20 m.

（3）20 世纪 70 年代，美国与苏联的标枪教练倡议缩短标枪形心与质心之间的距离，这样，使标枪变为滑翔枪，大大提高了运动成绩. 80 年代，世界级水平的运动员使用形心与质心近于重合的枪，世界纪录达 104 m. 标枪投得太远，会严重威胁到运动员、裁判员与观众的安全. 因此，国际田联对标枪形心与质心的距离作了严格的限制，e 不能太小，避免把标枪变成滑翔枪. 数 e 是影响标枪投掷远近的重要参数. 经过优化计算，发现影响标枪投掷远近最灵敏的参数是 ω_0，如果选择合适的 θ_0,α_0 并给一个优选的小角速度 ω_0，世界级水平运动员仍可投出 107 m 远.

习题三

1. 求在等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = L$$

下，泛函

$$S[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} y\mathrm{d}x, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

的极值曲线.

2. 求在条件 $\int_0^1 y^2\mathrm{d}x = 2$ 下，泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2)\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

的极值曲线.

3. 在所有弧长为 L 的闭曲线中，找一条闭曲线，使其围成的面积最大（试用极坐标求解本题）.

4. 用柱面坐标求圆柱 $r = R$ 上的短程线.

5. 用球面坐标求单位球面上的测地线.

6. 求在条件 $\int_{x_0}^{x_1} y\mathrm{d}x = l$ 下，等周问题 $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 l 为常数.

7. 在条件 $\int_0^1 (y'^2 - xy - z'^2)\mathrm{d}x = 2$ 下，求泛函

$$J[y(\cdot), z(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\mathrm{d}x$$

满足

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 1$$

的极值曲线.

8. 一个质点在时间 T 内无阻力地在曲面 $\varphi(x,y,z) = 0$ 上由点 (x_1, y_1, z_1) 移动到点 (x_2, y_2, z_2). 如果运动使质点的动能的平均值为极小，说明：其在曲面上路径满足参数方程

$$\frac{\ddot{x}}{\varphi_x} = \frac{\ddot{y}}{\varphi_y} = \frac{\ddot{z}}{\varphi_z}.$$

9. 用习题 8 的结果，求一个质点在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上由 $(0,0,1)$ 移动到

$(0,0,-1)$的路径方程,使得质点的平均动能为极小.

10. 设$\int_0^{\pi} y\mathrm{d}x = 1$,求使泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_0^{\pi}(y'^2 - y^2)\mathrm{d}x,\quad y(0) = 0,\quad y(\pi) = 1$$

取得极值的函数$y(x)$.

11. 求在$\int_0^{\pi} y^2\mathrm{d}x = 1$的条件下,使$\int_0^{\pi} y'^2\mathrm{d}x$取得极小值的函数$y(x)$,且满足$y(0) = 0, y(\pi) = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$.

12. 求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y^2 - yy' + y'^2)\mathrm{d}x$$

满足下列边界条件的极值曲线:

(1) $y(x)$经过$P_1(0,1)$,在$x=1$处满足自然边界条件;

(2) $y(x)$经过$P_2(1,2)$,在$x=0$处满足自然边界条件;

(3) $y(x)$在$x=0$与$x=1$处都满足自然边界条件.

13. 在铅直平面xOy内,用一根无摩擦的金属丝连接坐标系的原点O和P_1点,P_1点位于垂直x轴的直线$x=x_1$上的某处.求金属丝的形状,使放在点O的质量为m的小球在重力作用下,用最短的时间沿着金属丝滑到P_1点上.

提示:参考最速降线问题,$x=0$是固定端,$x=x_1$处为自然边界条件,即

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}}\right|_{x=x_1} = 0.$$

14. 求泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 y^3 y'^2 \mathrm{d}x,\quad y(0) = 1$$

的一阶变分.

15. 求泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 y^3 y'^2 \mathrm{d}x,\quad y(0) = 1$$

的横截条件.

第四章 物理学、力学中的变分原理和数学物理中的微分方程

§4.1 费马原理

正当数学中的变分理论取得进展的时候，物理学、力学中的各种变分原理也同时发展起来了，它们是推动变分学发展的一个重要动力.

变分原理，相当于数学中的公理，是逻辑推导的出发点. 变分原理不是定理，不能用逻辑推理的方法加以证明，它们是从大量的自然现象中归纳出来的. 为了介绍这些原理的具体内容，我们有必要先追溯一下它的发展历史，了解一下它的形成过程. 早在公元前，欧几里得(Euclid)证明了：(如图 4.1.1)在光的反射中入射角等于反射角，即∠1 = ∠2. 后来海伦(Heron)证明了：光线实际取的路径 PRQ，比任何一个能够想象的路径(例如 $PR'Q$)都要短，即光线实际所取的路径是花时间最少的路径. 光线在均匀介质中沿直线传播，就是取花时间最少的路径的例子.

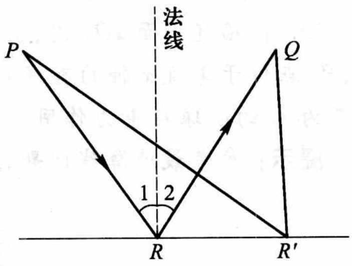


图 4.1.1

希腊以后的哲学家、科学家根据光的反射现象，还根据哲学、神学和审美原则等，提出了一种学说，就是“大自然以最短捷的可能途径行动”. 他们相信“自然界不会做任何多余的事”或者“任何不必要的工作”“自然总是以数学上最短和最好的可能方式行动”等. 至 17 世纪中叶，费马提出了光学中的最小时间原理，后来逐步发展，又形成了哈密顿原理、最小势能原理，等等. 在近代物理学、力学的很多领域里，都有其相应的变分原理. 下面我们就来介绍费马原理.

费马原理 通过介质的光路应使光线通过这一段光路所需的时间为最小值.

为了将费马原理数学化，设光线在(非均匀)介质中传播的速度为 $v(x,y,z)$；光线从 $A(x_0,y_0,z_0)$ 到 $B(x_1,y_1,z_1)$ 的光路为 $y=y(x)$，$z=z(x)$. 费马原理指出，它们应使泛函

$$T[y(\cdot),z(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x,y,z)}\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

取最小值,其可取函数集合为:以 A,B 为端点的所有分段光滑曲线.

设介质的折射率为 $n(x,y,z)$,c 为真空中的光速,由光学定律知

$$n(x,y,z) = \frac{c}{v(x,y,z)},$$

故泛函(1.1)又可表示为

$$T[y(\cdot),z(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} n(x,y,z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

当 v 或 n 给出以后,用求解欧拉方程的办法,可以确定光线在非均匀介质中传播的光路,下面我们就几种简单情况,进行讨论.

(1) 折射率 n 不依赖于 x 时的情况. 这时 $n = n(y,z)$,写出泛函(1.2)的欧拉方程组,且解出 y''及 z'',则得到方程组

$$ny'' = n_y(1 + y'^2 + z'^2), \quad nz'' = n_z(1 + y'^2 + z'^2),$$

且不难验证有首次积分

$$n = c_1\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

(2) 若折射率 n 不依赖于 x 和 y,则因为偏导数 $n_y = 0$,故从(1)中的第一个欧拉方程知,有

$$y'' = 0,$$

即

$$y = c_1 x + c_2,$$

这时光路为平面直线.

(3) 若折射率 $n(x,y,z) = c$(常数),即光在均匀介质中传播时,泛函(1.2)的欧拉方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

由(1.3)知 y',z'都是常数,不妨设

$$y' = m_1, \quad z' = m_2,$$

积分得

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1, \\ z = m_2 x + b_2, \end{cases} \tag{1.4}$$

这里 m_1, m_2, b_1 和 b_2 都是积分常数，可由边界条件来确定.(1.4)表示一条直线，这个结论是指在某一区域是均匀介质时，它才是正确的. 当我们研究光在海洋中（不是局部）传播时，我们就不能把海水当作均匀介质来看，海水沿海洋深度方向的分布是不均匀的. 这类光学问题属于非线性光学的范畴.

例 1 设光在一介质中由 $A_0(x_0, y_0)$ 传播到 $A_1(x_1, y_1)$，其速度与介质的高度成正比（如图 4.1.2）. 求光线传播的光路.

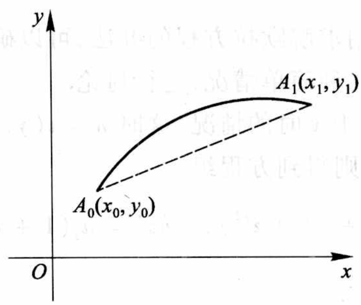


图 4.1.2

解 根据费马原理，光线在介质中传播的光路使

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{v} = a\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt = \min. \tag{1.5}$$

在这个问题中，x 与 y 都可以作为参数，为了使求解简单起见，我们把 y 看作参数，光路用 $x = x(y)$ 表示，这样，我们把变分问题(1.5)变为

$$a\int_{y_0}^{y_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{y} dy = \min \quad \left(x' = \frac{dx}{dy}\right). \tag{1.6}$$

(1.6)中的泛函被积式为

$$F = \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{y},$$

它不显含未知函数 $x(y)$，故有首次积分

$$\frac{x'}{y\sqrt{1 + x'^2}} = c_1,$$

即

$$x'^2 = c_1^2 y^2 (1 + x'^2),$$

故有

$$dx = \pm \frac{c_1 y dy}{\sqrt{1 - c_1^2 y^2}},$$

积分后化简得

$$(x + c_2)^2 + y^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

故所求的光路(极值曲线)为圆周,其圆心在 x 轴上,其中积分常数 c_1, c_2 由光路过 $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1)$ 两点而定. 这时光线不是沿直线传播,而是沿圆弧传播. 这类光学问题属于非线性光学的范畴.

§4.2 哈密顿原理

哈密顿原理是力学中的一个基本变分原理. 这个原理是: 质点系在容许的(即与约束条件相容的)运动中,质点系的真实运动,应使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$$

取极小值,其中 T, V 分别是质点系的动能和势能. $L = T - V$ 称为质点系的拉格朗日函数.

哈密顿原理不仅在动力学中有广泛的应用,而且在其他许多物理领域中,例如力学、场论等也得到了普遍的应用. 下面,我们举例说明这一原理的应用,开始我们先研究一些最简单的力学系统,然后再研究弦的振动、杆的振动等.

例 1 已知质点的质量为 m,坐标为 (x, y, z),且质点在保守力场中运动,其势函数为 V,求质点的运动方程.

质点的动能是 $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$,势能是 $V(x, y, z, t)$,由哈密顿原理可知,质点的真实运动应使

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t) \right] dt = \min.$$

故真实运动应满足欧拉方程

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0, \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 0, \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}} = 0, \end{cases}$$

即

$$m\ddot{x}+\frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

$$m\ddot{y}+\frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

$$m\ddot{z}+\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

值得指出，上述欧拉方程就是牛顿运动方程. 我们知道，对保守力场，力 $\boldsymbol{F}$ 和势函数的关系是

$$\boldsymbol{F}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right),$$

即

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

故质点的真实运动所满足的欧拉方程就是牛顿运动方程

$$m\ddot{x}=F_x,\quad m\ddot{y}=F_y,\quad m\ddot{z}=F_z. \tag{2.1}$$

这样，我们由哈密顿原理导出了牛顿运动方程. 当然也可以从牛顿运动方程，推出质点运动的哈密顿原理，这两者之间是等价的. 下面我们再看一个有趣的结论，由哈密顿原理可以导出能量守恒.

若 $T-V$ 中不显含 t，则欧拉方程（即运动方程）有首次积分

$$\dot{x}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}-(T-V)=c,$$

其中 c 为常数，上式即

$$2T-(T-V)=c,$$

从而

$$T+V=c.$$

在这种情况下，质点的动能与势能之和为一常数，这就是能量守恒律.

例 2 质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的质点系在势函数为 V 的力场的作用下运动. 设这些质点的坐标为 (x_i,y_i,z_i)，并且它们之间存在着约束条件

$$\varphi_j(t,x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n;z_1,z_2,\cdots,z_n)=0$$
$$(j=1,2,\cdots,m), \tag{2.2}$$

且 $m<3n$，求质点系的运动方程.

由哈密顿原理知这个问题是在满足(2.2)之下,应使

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V \right] \mathrm{d}t = \min.$$

为此,取辅助泛函

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j \right] \mathrm{d}t,$$

这里 $\lambda_j(t)(j=1,2,\cdots,m)$ 是引入的待定函数. 质点系的运动方程就是上式的欧拉方程,它们的形式是

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \\ m_i\ddot{y}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial y_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \\ m_i\ddot{z}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial z_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial z_i}, \end{cases} \tag{2.3}$$

最后,由欧拉方程(2.3)、约束条件(2.2)及相应的定解条件来确定质点系的运动方程.

这个问题也可以这样解,由于质点系受了 m 个约束(2.2),则其运动的位置独立变量只剩下 $3n-m$ 个,如果我们令 $3n-m$ 个独立变量为

$$q_1, q_2, \cdots, q_{3n-m}, \tag{2.4}$$

并用它们来表示 x_i, y_i, z_i 就有

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-m}, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-m}, t), \quad i = 1,2,\cdots,n. \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-m}, t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

则 V, T 应该表示为

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-m}, t),$$

$$T = T(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_{3n-m}, t),$$

这时由哈密顿原理可知,质点系的真实位移

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,3n-m)$$

应使泛函

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - V)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

取极小值. 泛函(2.6)的欧拉方程为

$$L_{q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot{q}_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,3n-m),\tag{2.7}$$

这个方程组也叫做保守系统的拉格朗日方程组. 在力学上,把 q_i 叫做广义坐标. 如果我们解出这个方程组的解

$$q_i=q_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,3n-m)$$

后,将它们代入(2.5),便可以求出质点的运动方程.

例 3 一质量为 m 的质点,悬挂在一弹簧下端,在弹力的作用下,作上下振动. 设弹簧的弹性系数为 k,弹簧的质量忽略不计,求质点的运动方程和运动规律.

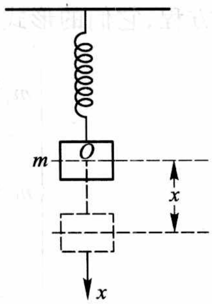


图 4.2.1

取平衡位置为原点 O,x 轴竖直向下(如图 4.2.1),质点位移 x 是时间 t 的函数. 由力学知,质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

弹性势能为

$$V=\frac{1}{2}kx^2,$$

质点的真实运动使得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2\right)\mathrm{d}t=\min,\tag{2.8}$$

这时欧拉方程为

$$m\ddot{x}+kx=0,\tag{2.9}$$

它的解为

$$x=A\sin(\omega t+\alpha)\left(\text{这里 }\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right),$$

常数 A 与 α 的值由定解条件确定.

可见质点的运动微分方程为简谐振动方程. 质点的真实运动是简谐振动.

例 4 一条质量分布均匀的弦,其长为 L,两端固定受不变张力 k 的作用,在平衡位置邻近作微小的横振动,求弦的振动方程.

解 设弦在铅垂平面内作平面运动,其上任一点的横向位移为 $u(x,t)$,我们考虑的是小振动,就是说 u 及其对 x 的微商的高次方(比之于低次方来说)可以略去. 因弦的两端固定,故有 $u(0,t)=u(L,t)=0$. 该弦的动能可由积分

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho u_t^2 \mathrm{d}x$$

给出,其中 ρ 表示弦的线密度. 势能 V 和弦的伸长成正比,其比例常数为 k. 弦的伸长为

$$\int_0^L \sqrt{1 + u_x^2}\mathrm{d}x - L \approx \frac{1}{2}\int_0^L u_x^2 \mathrm{d}x,$$

所以势能可表示为

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L k u_x^2 \mathrm{d}x,$$

由哈密顿原理推出,弦的真实位移 $u(x,t)$ 应当使泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}(T - V)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L (\rho u_t^2 - k u_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \min, \qquad (2.10)$$

这时欧拉方程为

$$\rho u_{tt} - k u_{xx} = 0, \qquad (2.11)$$

这就是著名的弦自由振动方程(还有边界条件和初值条件).

在例 4 中,若有力密度为 $f(x,t)$ 的外力作用在弦上,则在势能部分应加上一项 $\int_0^L f(x,t)u\mathrm{d}x$, 还是应用哈密顿原理,得到弦的强迫振动方程

$$\rho u_{tt} - k u_{xx} - f(x,t) = 0. \qquad (2.12)$$

例 5 求梁的横振动方程. 如图 4.2.2,我们取梁在静止时的轴线为 x 轴,设其长度为 L,两端固定在支架上,它受力后在平面内作横向自由振动. 梁的位移是 x 和 t 的函数,记作 $u(x,t)$. 当梁发生变形时,其势能只与曲率的平方成正比,又因为我们考虑的是小振动,故可以用二阶导数代替曲率①,因而形变势能为

$$V = \frac{\mu}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \mathrm{d}x,$$

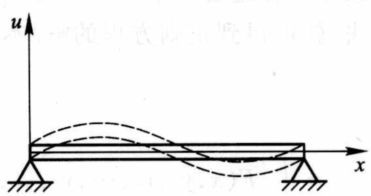


图 4.2.2

① 曲率 $K = \frac{|u_{xx}|}{(1 + u_x^2)^{3/2}}$,但我们考虑的是小振动,所以 $1 + u_x^2 \approx 1$,即 $K = |u_{xx}|$.

其中 $\mu = EJ$,E 为杨氏模量,J 为梁断面的惯性矩,动能可写成

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho u_t^2 \mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为梁的密度,由哈密顿原理,应有

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L \left(\frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}\mu u_{xx}^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \min, \tag{2.13}$$

其欧拉方程就是梁的横振动方程,即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu u_{xx}) = 0, \tag{2.14}$$

如果梁是均匀的,则 ρ 和 μ 是常数,梁的振动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{2.15}$$

又如果梁受到力密度为 $f(x,t)$ 的外力的作用,那么梁的强迫振动方程是

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - f(x,t) = 0. \tag{2.16}$$

*§4.3 正则方程及其雅可比-哈密顿方程

从本章的前两节中,我们已经知道,许多物理和力学问题的规律性,可以由泛函的极小问题出发,通过其欧拉方程来描述. 然而要积分出这些微分方程,往往是很困难的,许多力学家、数学家曾致力于积分出这些微分方程的工作. 1834 年英国力学家哈密顿最先从质点系动力学问题出发,将泛函的欧拉方程组(它们往往是二阶以上的微分方程组)降为一阶微分方程组,并选择一种最佳的变量代换,使得这个一阶方程组,具有漂亮的对称形式,这就是正则方程组,它的积分问题仍然是同样的困难. 后来,哈密顿和雅可比又找到了和正则方程相对应的一阶偏微分方程,这种偏微分方程还容易求得一个完全积分,由这个完全积分出发,再通过微分法和消去法,就可得到正则方程的解. 本节将介绍这方面的工作.

1. 正则方程

我们来考虑泛函

$$T[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

的极值问题. 此外,还假定有

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_j'}\right) \neq 0, \tag{3.2}$$

泛函(3.1)的欧拉方程为

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{3.3}$$

我们来求具有对称形式的方程(3.3)的一阶微分方程组. 为此令

$$F_{y_i'}(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')=p_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{3.4}$$

由于 $\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_j'}\right)\neq 0$,故由方程组(3.4),可以解出 y_i' 关于 p_j 的表达式. 若令 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}y_i'-F$ 为一个新的函数 H,即

$$H(x,y_1,\cdots,y_n,p_1,\cdots,p_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}y_i'-F=\sum_{i=1}^{n}p_iy_i'-F,\tag{3.5}$$

这里将 p_i 作为与 y_i 一样的独立参数看. 因此

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial y_j'}{\partial y_i}-\left(F_{y_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_j'}\frac{\partial y_j'}{\partial y_i}\right),$$

注意到(3.4),上式两个求和项互相抵消,故有

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}=-\frac{\partial F}{\partial y_i},$$

再根据(3.3)和(3.4)即得 n 个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial H}{\partial y_i},\tag{3.6}$$

类似地推导,可得

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x},\tag{3.7}$$

综合(3.6)、(3.7),便得到 $2n$ 个一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial H}{\partial y_i}\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{3.8}$$

由于方程组(3.8)在经典力学中有非常重要的应用价值,故人们称之为欧拉方程(3.3)的正则方程,在得到(3.8)的过程中,所引入的变换(3.4)、(3.5)称为勒让德变换. 从(3.5)和(3.7)容易得出泛函(3.1)的被积函数 F 和 H 的表达式为

$$F=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H.\tag{3.9}$$

若泛函(3.1)的边界条件为变动边界,由§3.6可知,在变动端点其横截条件

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\delta x+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i=0,$$

即变为

$$-H\delta x+\sum_{i=1}^{n}p_i\delta y_i=0.$$

2. 正则方程的力学意义

假定我们求一个在有势力作用下,质量 m 的自由质点运动方程. 由于在许多场合,采用适当的坐标系,对解决问题会带来极大的方便,所以,我们将采用广义坐标(q_1,q_2,q_3)来确定质点的位置. 设它和直角坐标之间的关系是不随时间而变化的所谓稳定变换

$$\begin{cases}x=\varphi_1(q_1,q_2,q_3),\\ y=\varphi_2(q_1,q_2,q_3),\\ z=\varphi_3(q_1,q_2,q_3),\end{cases}\tag{3.10}$$

并且有

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\neq 0.$$

其势能只随时间 t 以及广义坐标 q_i 而变化,而与广义速度 $\dot{q}_i$ 无关($\dot{q}$ 表示 q 对时间的导数). 于是自由质点的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(x,y,z,t)\\&=\frac{1}{2}m\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-\widetilde{V}(q_1,q_2,q_3,t),\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中 a_{ij}是 q_i 的函数. 据哈密顿最小作用原理,质点的真实运动应使泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}L(t,q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3)\,\mathrm{d}t$$

取极小值,其欧拉方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,3),\tag{3.12}$$

这就是质点的运动方程组.(3.12)是由三个二阶常微分方程组成的,其通积分中,会有六个任意常数,需要由三个初始广义坐标以及三个初始广义速度来确定,于是把 q_i 和 $\dot{q}_i$ 同样看作为确定质点运动的独立参数,在求解 q_i 这三个未知

函数时,可令

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=p_i,$$

从而将(3.12)变成含有 $q_i(t)$, $p_i(t)$ 的六个一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=p_i,\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) \tag{3.13}$$

的方程组,但通过这样简单变换而产生的方程组(3.13),既未降低解运动方程组(3.12)的难度,在形式上又不够对称,所以,在数学上的意义并不大,按前段的研究结果,我们令

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=p_i \tag{3.14}$$

(p_i 在力学上被称为广义动量);又因为势能 V 与广义速度无关,故有 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$,而 $T=\frac{1}{2}m\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$,所以得

$$p_i=m(a_{i1}\dot{q}_1+a_{i2}\dot{q}_2+a_{i3}\dot{q}_3)\quad (i=1,2,3), \tag{3.15}$$

容易验证

$$\det(a_{ij})=\left[\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\right]^2\neq 0,$$

因此,可以从(3.15)解出

$$\dot{q}_i=\sum_{j=1}^{3}\tilde{a}_{ij}p_j\quad (i=1,2,3), \tag{3.16}$$

再令

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=H(t,q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) \tag{3.17}$$

(这是由于上式的左端是 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数,将其中的 $\dot{q}_i$ 用(3.16)代换,即成为 q_i 和 p_i 的函数),便可得到如下的正则方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{3.18}$$

下面,我们来说明哈密顿函数的力学意义. 在

$$H=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-(T-V)$$

中用$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$来代换$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$，便得

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + V, \tag{3.19}$$

但因 T 是 $\dot{q}_i$ 的齐二次式，故由欧拉定理，得到

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T,$$

代入(3.19)得

$$H = 2T - T + V = T + V,$$

这就表明，当势函数与广义速度无关时，有势力场作用下的自由质点，在具有稳定变换的坐标系下，哈密顿函数就是质点的总机械能. 这时，质点运动的正则方程可直接写出，即

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(T+V)}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial(T+V)}{\partial q_i}$$

（当然，$T+V$ 中的 $\dot{q}_i$ 必须通过(3.16)式代之以广义动量 p_i），而无需再去推导 H 的表达式.

值得指出，当采用了勒让德变换后，欧拉方程(3.3)变成了正则方程(3.8)，从数学上说，只是将一个二阶微分方程组变成具有对称形式的一阶微分方程组，然而，积分(3.8)和积分(3.3)，从难度上说，几乎是一样的. 如前所述，在数学物理上的许多问题中，因为用普通的方法积分正则方程往往比较困难，所以，哈密顿和雅可比从一阶偏微分方程的理论出发，找到了和正则方程对应的偏微分方程，即雅可比－哈密顿方程，有些时候积分雅可比－哈密顿方程较容易些.

3. 雅可比－哈密顿方程

从偏微分方程的理论知道，一阶偏微分方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, p_1, p_2, \cdots, p_n, p_{n+1}) = 0 \tag{3.20}$$

（其中 $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$，$z$ 为未知函数）的特征方程组是

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{\frac{\partial F}{\partial p_{n+1}}}$$

$$= \frac{\mathrm{d}p_1}{-\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{\mathrm{d}p_2}{-\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}p_n}{-\frac{\partial F}{\partial x_n}} = \frac{\mathrm{d}p_{n+1}}{-\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}}. \tag{3.21}$$

在(3.20)中若令 $x_{n+1}=x, x_1=y_1, \cdots, x_n=y_n, p_1=\dfrac{\partial s}{\partial y_1}, \cdots, p_n=\dfrac{\partial s}{\partial y_n}, p_{n+1}=\dfrac{\partial s}{\partial x}$,

$$F=\frac{\partial s}{\partial x}+H\left(x, y, \cdots, y_n, \frac{\partial s}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial s}{\partial y_n}\right),$$

则方程(3.21)即为

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{\mathrm{d}y_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{\mathrm{d}y_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{\mathrm{d}p_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial y_1}}=\frac{\mathrm{d}p_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial y_2}}=\cdots=\frac{\mathrm{d}p_n}{-\dfrac{\partial H}{\partial y_n}}=\frac{\mathrm{d}x}{1}.$$

它正好是正则方程(3.8)的等价形式. 这就说明一阶偏微分方程

$$\frac{\partial s}{\partial x}+H\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial s}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial s}{\partial y_n}\right)=0 \tag{3.22}$$

的特征方程组就是哈密顿正则方程(3.8). 我们称一阶偏微分方程(3.22)为正则方程(3.8)的雅可比-哈密顿方程,未知函数 s 称为哈密顿主函数. 如果求得了正则方程(3.8)的积分,那么,就可以知道雅可比-哈密顿方程(3.22)的积分,这个问题不是本书讨论的对象,有兴趣的读者可以参阅一阶偏微分方程的著作.

哈密顿和雅可比成功地证明了这个关系是可逆的,即如果求得了雅可比-哈密顿偏微分方程的完全积分,那么,可以由此完全积分通过简便的微分法和消去法构造出其相应的正则方程的积分来. 这一方法的内容包含在下面的哈密顿-雅可比定理中.

为了叙述并证明这一定理,我们先来介绍“完全积分”的概念. 如果函数

$$S=\Phi(x, y_1, \cdots, y_n, a_1, \cdots, a_n)$$

是偏微分方程(3.22)的一个含有 n 个参数 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的解,且 Φ 对于其复变元和参数都是二阶连续可导的,并且有

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial a_j}\right) \neq 0, \tag{3.23}$$

那么,我们把依赖于 $n+1$ 个参数的函数

$$S=\Phi+a_{n+1}\text{①}$$

称为(3.22)的完全积分.

定理(哈密顿-雅可比) 如果知道了雅可比-哈密顿方程 $\dfrac{\partial s}{\partial x}+H(x,$

---

① 据偏微分方程理论,完全积分所含的任意常数的个数应该等于独立参数的个数.

$y_1,\cdots,y_n,a_1,\cdots,a_n)=0$ 的一个完全积分

$$S=\Phi(x,y_1,\cdots,y_n,a_1,\cdots,a_n)+a_{n+1},\tag{3.24}$$

那么,带有 $2n$ 个参数 a_i,b_i 的方程组

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}=b_i,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}=p_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3.25}$$

就是正则方程$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial H}{\partial y_i}$的积分.

证明 据 $S=\Phi+a_{n+1}$ 为(3.22)的完全积分的假定,可知必有 $\det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\partial a_j}\right)\neq 0$,因此,由(3.25)的前 n 个方程$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}=b_i$,可以解出 y_i 表示为 x 以及 $2n$ 个参数 a_i,b_i 的函数 $y_i(x)$,将这些 $y_i(x)$ 再代入(3.25)的后 n 个方程式,又可得到 n 个函数 $p_i(x)$,我们来证明,$y_i(x)$ 和 $p_i(x)$ 满足正则方程组(3.8).

将$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}=b_i$ 对 x 微分得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial a_i\partial x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial a_i\partial y_k}\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{3.26}$$

又因(3.24)是(3.22)的完全积分,故有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+H\left(x,y_1,\cdots,y_n,\frac{\partial\Phi}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right)=0,\tag{3.27}$$

将上式对 a_i 微分,得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial a_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_k\partial a_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{3.28}$$

又因为 Φ 对所有变元和参数二阶连续可导,故(3.26)、(3.28)中的二阶混合偏导数的求导顺序可以交换,于是由(3.26)减去(3.28),得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_k\partial a_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

由于 $\det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\partial a_j}\right)\neq 0$,所以有

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这就证明了(3.25)满足(3.8)的前 n 个方程. 为了证明它还满足(3.8)的后 n 个

方程,我们将$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}=p_i(i=1,2,\cdots,n)$对 x 微分,得到

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_k}\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

将(3.27)对 y_i 微分,得到

$$0=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k \partial y_i}+\frac{\partial H}{\partial y_i}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

比较以上两式,并且注意已证得的$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$,立即有

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

至此定理证完.

例 1(二体问题) 设两个质量分别为 m_1,m_2 的质点 P_1 和 P_2 之间依照牛顿万有引力的作用,而互相吸引,求其相对运动规律.

解 显然,运动一定是保持在一个平面内,设此平面为 xOy 平面,并将 P_2 置于原点,我们求 $P_1(x,y)$点在 xOy 坐标系下的运动规律. 质点 P_1 的动能为 $T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$,势能为 $V=-\frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,其拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{Gm_1m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

据哈密顿最小作用原理,P_1 点的真实位移应使泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=m_1\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{Gm_2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\mathrm{d}t$$

取极小值,即使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=m_1\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{k^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\mathrm{d}t \qquad (3.29)$$

取极小值,其中 G 为引力常数,令 $k^2=Gm_2$. 泛函(3.29)的欧拉方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dfrac{k^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0,\\[2ex] \ddot{y}+\dfrac{k^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0,\end{cases}\qquad (3.30)$$

用简单的方法,积分这个二阶微分方程组是较难的,因此,我们先写出它的正则方程组来,对(3.29)的被积函数使用勒让德变换,令$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=p$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}=q$,哈密顿函数为

$$H=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y}-F=\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\frac{k^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

于是(3.30)的正则方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{k^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\\&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=q, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{k^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned} \tag{3.31}$$

这个方程组仍然不易积分,再来用雅可比方法讨论本问题,即寻求(3.31)的雅可比－哈密顿方程的完全积分,再根据本段的哈密顿－雅可比定理来求正则方程(3.31)的解. 写出雅可比－哈密顿方程

$$\Phi_t+\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2)-\frac{k^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=0, \tag{3.32}$$

为了找到(3.32)的完全积分,我们引入极坐标(r,θ),这时,(3.32)变为

$$\Phi_t+\frac{1}{2}\left(\Phi_r^2+\frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2\right)=\frac{k^2}{r},$$

上式具有完全积分

$$\Phi=-\alpha t-\beta\theta-\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{2\alpha+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{\beta^2}{\rho^2}}\mathrm{d}\rho,$$

据哈密顿－雅可比定理,(3.31)的通解为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=-t_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}=\theta_0,$$

即

$$\begin{cases}t-t_0=-\displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{2\alpha+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{\beta^2}{\rho^2}}}\mathrm{d}\rho,\\[2ex]\theta-\theta_0=\beta\displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\rho^2\sqrt{2\alpha+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{\beta^2}{\rho^2}}}\mathrm{d}\rho,\end{cases}$$

上式的第二个方程可以表示为 $r=r(\theta)$ 的形式，它给出质点的运动轨线；第一个方程可以表示为 $r=r(t)$ 的形式，它给出质点在轨线上运动随时间的变化规律. 如果引入 $\rho'=\dfrac{1}{\rho}$，则可算出轨线的形式为

$$\theta-\theta_0=-\arcsin\frac{\dfrac{\beta^2}{k^2}\dfrac{1}{r}-1}{\sqrt{1+\dfrac{2\alpha\beta^2}{k^4}}},$$

如果再令 $\dfrac{\beta^2}{k^2}=\delta,\varepsilon^2=\sqrt{1+\dfrac{2\alpha\beta^2}{k^4}}$，则轨线的形式成为

$$\theta-\theta_0=-\arcsin\frac{\dfrac{\delta}{r}-1}{\varepsilon^2},$$

即

$$r=\frac{\delta}{1-\varepsilon^2\sin(\theta-\theta_0)}.$$

这个极坐标曲线方程，当 $\varepsilon<1$ 时，代表椭圆；当 $\varepsilon=1$ 时，代表抛物线；当 $\varepsilon>1$ 时，代表双曲线. 于是完全弄清了质点 P_1 的运动情况.

例 2 求泛函

$$J[y(\cdot)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{3.33}$$

的极值曲线.

解法一 直接积分泛函的欧拉方程. 若采用直角坐标系，泛函(3.33)的欧拉方程难以积分，故把泛函(3.33)变到极坐标系 (r,θ) 下来讨论，(3.33)即为

$$J[r(\cdot)]=\int_{\theta_0}^{\theta_1}r\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta,$$

因为上式的被积函数中不显含 θ，故其欧拉方程有首次积分

$$\frac{r^3}{\sqrt{r^2+r'^2}}=\alpha,$$

继续积分得

$$r^2\cos(2\theta-\beta)=\alpha,$$

其中 α,β 为任意常数，变回到直角坐标系，有

$$x^2\cos\beta + 2xy\sin\beta - y^2\cos\beta = \alpha. \tag{3.34}$$

解法二 用哈密顿正则方程求解. 设$\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{x^2+y^2}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = p$,则哈密顿函数为

$$H(x,y,p) = -\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2} + py' = -\sqrt{x^2+y^2-p^2},$$

我们得到正则方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}, \end{cases} \tag{3.35}$$

上式的两个方程相除,得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{p},$$

积分得

$$p^2 - y^2 = A^2, \tag{3.36}$$

将(3.36)代回到(3.35)的第二个方程,得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{y^2+A^2}}{\sqrt{x^2-A^2}},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+A^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-A^2}},$$

积分得

$$y + \sqrt{y^2+A^2} = B(x + \sqrt{x^2-A^2}),$$

由此得

$$x^2 + \left(B - \frac{1}{B}\right)xy - y^2 = \frac{1}{4}\left(B + \frac{1}{B}\right)^2 A^2,$$

如果设 $\cos\beta = \dfrac{2B}{B^2+1}$, $\sin\beta = \dfrac{B^2-1}{B^2+1}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}A^2$,则又重新得到(3.34).

解法三 用雅可比方法来求解. (3.35)的雅可比-哈密顿方程为

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2},$$

或写为

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2, \tag{3.37}$$

自然设其完全积分为

$$s = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \tag{3.38}$$

将它代入(3.37),并比较系数,有

$$A^2 + B^2 = 1, \quad B(A + C) = 0, \quad B^2 + C^2 = 1,$$

这样,就可以令 $A = -C = \sin\beta, B = -\cos\beta$,将这些代入(3.38),于是雅可比-哈密顿方程的完全积分为

$$s = \frac{1}{2}(x^2\sin\beta - 2xy\cos\beta - y^2\sin\beta),$$

根据哈密顿-雅可比定理,正则方程有如下的积分

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\alpha,$$

于是又重新得到(3.34).

§4.4 最小势能原理

一个弹性体由于受外力的作用而发生变化,由原来的平衡状态变到新的平衡状态,这时,弹性体便产生了小变形位移,以及应力、应变等. 然而真实位移应该服从怎样的规律呢? 它和外载荷以及弹性体本身的物理特性有什么关系呢? 这些问题可以由最小势能原理来给以回答. 为了叙述最小势能原理,让我们首先来定义弹性体的总能量.

设 V 是弹性体的变形能,W_p 是外载荷的势能,我们称弹性体的变形能与外载荷的势能之和为弹性体的总能量,记为 Π,即

$$\Pi = V + W_p. \tag{4.1}$$

最小势能原理 在一切"可取位移"中,弹性体的真实位移应使其总能量 Π 取最小值.

总能量 Π 经常以积分的形式给出,下面,我们举几个例题,用以说明最小势能原理的应用.

例 1　在两个同样高度的水平圆孔 A 和 B 内插入一根均匀的弹性的细小横梁,在重力作用下,若横梁只作微小弯曲,求横梁变形后的形状(挠度曲线).

解　取坐标系如图 4.4.1,取 A,B 两圆孔的中心连线为 x 轴,取该连线的中点为坐标原点 O,y 轴垂直于 x 轴向上,又设横梁的长度为 $2l$,它变形后的形状,即挠度曲线为 $y=y(x)$.

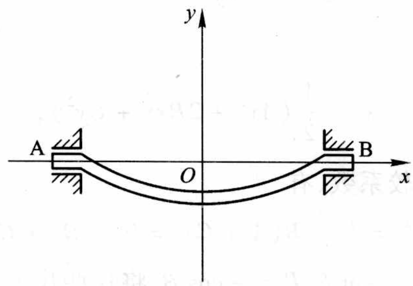


图 4.4.1

我们用最小势能原理来求出这个挠度函数,为此,首先计算弹性横梁的总能量,它由弯曲变形势能和重力势能两部分组成.下面,我们分两步计算它们.

(1) 弯曲变形势能　我们知道,梁的弯曲变形势能与这段梁的曲率的平方成正比,而又知曲率的公式为

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

故整个梁的变形势能为

$$V=\frac{1}{2}\mu\int_{-l}^{l}\left[\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right]^2\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

其中常数 μ 与梁的弹性系数及梁的横断面的惯性矩有关.注意到梁发生的是小变形,即 $|y'|\ll 1$,故有

$$V\approx\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\mu y''^2\mathrm{d}x.$$

(2) 重力势能为

$$W_p=\int_{-l}^{l}\rho y\mathrm{d}s,$$

其中 ρ 表示梁的单位长度上的重量,因为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\approx\mathrm{d}x$,故重力势能为

$$W_p=\int_{-l}^{l}\rho y\mathrm{d}x.$$

于是梁的总能量为

$$\Pi[y(\cdot)] = \int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y\right)\mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

由最小势能原理，真实的位移 $y = y(x)$ 应使泛函(4.3)取最小值，故 $y = y(x)$ 必须满足泛函(4.3)的欧拉－泊松方程

$$\rho + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mu y'' = 0,$$

直接积分上式，可得

$$y = \frac{\rho}{24\mu}(-x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta),$$

其中积分常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 由边界条件

$$y(-l) = y(l) = 0, \quad y'(-l) = y'(l) = 0$$

确定为

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta = 2l^2, \quad \delta = -l^4,$$

最后得到梁的挠度曲线为

$$y = \frac{\rho}{24\mu}(-x^4 + 2l^2x^2 - l^4).$$

例 2 一个拉紧的平面弹性薄膜，在载荷密度为 $f(x,y)$ 的外载荷的作用下，产生了垂直于薄膜所在平面方向的小位移，求薄膜变形后的表面方程.

解 如图 4.4.2，设 Γ 是 xOy 平面上一条固定的闭曲线，而弹性薄膜张紧在它的上面，又设薄膜在外载荷的作用下的表面方程为 $u = u(x,y)$.

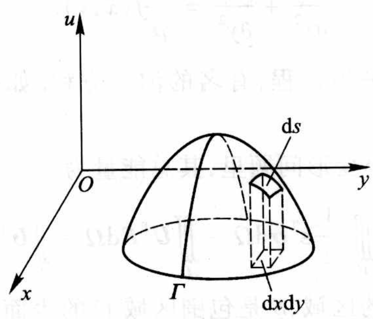


图 4.4.2

薄膜受力前，它在 xOy 平面上的面积元为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，受力后，该面积元变为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

面积元的形变改变量为

$$(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为考虑薄膜发生的是小变形,故有 $|u_x| \ll 1, |u_y| \ll 1$,所以面积元的形变改变量为

$$(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[1+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)-1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

我们知道,薄膜的形变能与面积元的形变改变量成正比,比例常数为张力 μ,所以总的形变能为

$$V = \frac{\mu}{2}\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 xOy 平面上由 Γ 所围成的区域. 而外载荷的势能为

$$W_p = \iint_D f(x,y)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故薄膜的总能量为

$$\Pi[u(\cdot,\cdot)] = \iint_D\left\{\frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+f(x,y)u\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由最小势能原理,真实位移 $u(x,y)$ 应使上面的总能量泛函取最小,因而它应满足该泛函的欧拉方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}f(x,y).$$

这就是人们熟知的薄膜平衡方程,有名的泊松方程. 如再加上边界条件 $u|_\Gamma = 0$,这个问题就可以求解了.

在一般的弹性体的小变形问题里,其总能量为

$$\Pi = \iiint_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega - \iiint_\Omega \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega - \iint_S \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathrm{d}s,$$

其中 Ω 表示弹性体所占的区域,S 是包围区域 Ω 的表面,$\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{U}$ 分别表示应变、应力和位移向量,$\boldsymbol{F},\boldsymbol{P}$ 分别表示体力和表面力向量,上标 T 表示转置.

介绍了力学与物理学中的变分原理以后,我们就可以给泛函以物理解释了. 力学与物理学中的许多问题都可以归结为下列变分问题: 在可取函数类 K 中,欲求一个函数 u,它满足

$$I[u] = \min_{v\in K} I[v],$$

其中可取函数 K 可能是表示容许位移、轨迹等一些量的函数集合. 而物理学、力学中的泛函可以看成可取函数集合 K 到力学系统的能量 E 的一个映射,即

$$I:K \longrightarrow E(\text{或 } K \xrightarrow{I} E).$$

由 §4.2 与本节中的例子,我们可以看到一个重要的事实,那就是力学、物理学中的运动方程或状态方程,往往可以表现为泛函的欧拉方程. 例如,牛顿运动方程、简谐振动方程、弦的自由振动方程、梁的挠度曲线方程、薄膜的平衡方程,等等,都是相应泛函的欧拉方程. 过去我们只知道,在物理学和力学中,人们把变量之间的变化规律直接表示成微分方程的形式. 我们从本章的学习中知道,物理学和力学中的变量之间的变化规律,也可以通过某些泛函的极小来导出,这就是物理学、力学中的变分原理. 在建立了这些变分原理之后,我们就能把物理学、力学等许多学科与变分学紧密地联系起来,从而使得变分学这个数学分支成为许多自然科学的重要工具.

§4.5 二次泛函的极小问题及其与特征值问题的关系

1. 数学物理中的微分方程与二次泛函极小问题

在变分法中,二次泛函无论在理论上,或者在应用上,都具有很重要的意义. 这是由于,二次泛函的欧拉方程是线性的;而且,很多数学物理中的微分方程都与二次泛函的极小问题等价;另外,它还与特征值问题有关.

我们称被积式是未知函数及其导数的二次式的泛函为二次泛函. 例如形如

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y]\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

的泛函就是一个二次泛函,其中 $p(x)$,$q(x)$,$f(x)$ 都是 x 的已知函数,且 $p(x) > 0$,$q(x) \geqslant 0$. 泛函(5.1)的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)y - f(x) = 0, \tag{5.2}$$

它是一个一般的二阶线性常微分方程. 当泛函(5.1)的变分问题带有固定边界时,则未知函数除了满足方程(5.2)外,还应满足边界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1;$$

而当泛函(5.1)的变分问题是自由边界时,则未知函数除了满足方程(5.2)外,还应满足自然边界条件

$$y'(x_0) = 0, \quad y'(x_1) = 0;$$

又当泛函(5.1)的变分问题是变动边界时,则未知函数应满足方程(5.2)和相应的横截条件.

又如泛函

$$I[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3}$$

也是一个二次泛函,它的欧拉方程为

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \tag{5.4}$$

这是一个泊松方程. 当$f(x,y) \equiv 0$,(5.4)就变为拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5.5}$$

当泛函(5.3)的变分问题是固定边界时,未知函数除了满足方程(5.4)外,还应满足边界条件

$$u(x,y)\big|_\Gamma = 0, \tag{5.6}$$

其中Γ是区域B的边界. 当泛函(5.3)的变分问题是自由边界时,未知函数应满足微分方程(5.4)以及自然边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \tag{5.7}$$

这里n表示边界Γ的外法线方向.

带上相应的边界条件的拉普拉斯方程或泊松方程的求解问题,是数学、物理学、力学和电磁场等领域中一类最常见的、也是最重要的偏微分方程定解问题. 对于这些问题,已经有了很多求解的方法,但是对于较复杂的边界问题,还无法求得它的精确的解析解,只能用各种近似方法求得它的近似解析解或者数值解.

值得指出的是,在有些变分问题中,其泛函的欧拉方程虽然简单,但附加的边界条件却是比(5.6)和(5.7)这样的第一类、第二类边界条件较为复杂一些的某一类边界条件;另外,在有些变分问题中,泛函的欧拉方程本身就比较复杂. 例如,在§3.4中,我们曾推出泛函(4.18)的欧拉方程和自然边界条件是泊松方程附加以第三类边界条件的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y), & \text{在 } B \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s)u = \varphi(s), & \text{在 } B \text{ 的边界上}; \end{cases}$$

又如,在弹性力学中,诸如板的弯曲等一系列平面问题,常常要求使泛函

$$\Pi=\iint_{B}\left\{(\Delta u)^{2}v-2(1-v)\left[\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}-\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}\right)^{2}\right]-2f(x,y)u\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$2\oint_{\Gamma}P(s)u\mathrm{d}s+\oint_{\Gamma}m(s)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{5.8}$$

取极小值，泛函(5.8)也是一个二次泛函，当 $v=1$ 时，它的欧拉方程为

$$\Delta\Delta u=f(x,y),$$

即

$$\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{4}}+2\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}\partial y^{2}}+\frac{\partial^{4}u}{\partial y^{4}}=f(x,y), \tag{5.9}$$

方程(5.9)所对应的齐次方程是

$$\Delta\Delta u=0, \qquad (5.9)'$$

方程(5.9)′称为重调和方程. 用类似于§3.4中的方法，由泛函(5.8)的一阶变分为零，可求得(5.8)的自然边界条件.

2. 特征值问题与变分问题的关系

现在让我们研究数学物理中非常重要的一类问题——特征值问题，它与数学物理中的微分方程边值问题以及力学中的振动问题紧密相关. 在研究两端固定的不均匀弦的自由振动时，可以推出微分方程的边值问题

$$\begin{cases}(p(x)y')'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0, & (5.10)\\ y(a)=y(b)=0, & (5.11)\end{cases}$$

这里 $p(x)>0$ 有连续导数，λ 为待定的常数，$q(x)$，$\rho(x)$ 是 x 的连续函数. 一般说来，不是对任何 λ 值，这个边值问题都有不恒等于零的解，而只有当参数 λ 取某些值时，该边值问题才有不恒为零的解. 我们称 λ 的这些值为边值问题的特征值，而相应于特征值的非零解 $y(x)$ 称为边值问题的特征函数. 所谓特征值问题，就是确定微分方程(5.10)的特征值，使得有满足边界条件的不恒为零的解存在. 人们称方程(5.10)和边界条件(5.11)这类定解问题为施图姆－刘维尔(Sturm－Liouville)问题.

可以证明，对于施图姆－刘维尔问题，我们有下列的结论：

(1) 微分方程(5.10)在边界条件(5.11)下，有无数多个可以按大小排列的特征值，即

$$\lambda_{1}<\lambda_{2}<\cdots<\lambda_{k}<\cdots,$$

依次称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 为第一特征值，第二特征值，…. 它们所对应的规范特征函数分别是

$$y_1(x),\quad y_2(x),\quad \cdots,\quad y_k(x),\quad \cdots. \tag{5.12}$$

（2）对应于不同特征值的特征函数带权 $\rho(x)$ 正交,即

$$\int_a^b \rho(x)y_i(x)y_j(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

（3）特征函数系(5.12)是一个完备的正交系.

对于这类问题的求解,常常借助于近似方法,首先必须求得特征值的等价变分问题.作为例子,我们着重指出:施图姆-刘维尔问题与求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]\,\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

在条件

$$\int_a^b \rho(x)y^2\,\mathrm{d}x = 1 \tag{5.14}$$

下,满足边界条件(5.11)的极小问题有关,条件变分问题(5.13)、(5.14)与施图姆-刘维尔问题之间的关系是:

（1）边值问题(5.10)、(5.11)是条件变分问题(5.13)、(5.14)的欧拉方程及相应的边界条件.

这一点很容易直接验证,读者可以自己完成.

（2）当 $y=y_i(x)$（$y_i(x)$ 为第 i 个特征函数）时,泛函(5.13)的值为 λ_i.

我们计算下面的积分值

$$\int_a^b [p(x)y_i'^2 + q(x)y_i^2]\,\mathrm{d}x. \tag{5.15}$$

用分部积分法将积分(5.15)的第一项变形,利用条件(5.11),有

$$\int_a^b p(x)y_i'^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b py_i'y_i'\,\mathrm{d}x = (py_i')y_i\Big|_a^b - \int_a^b (py_i')'y_i\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_a^b (py_i')'y_i\,\mathrm{d}x, \tag{5.16}$$

将(5.16)代入(5.15),并注意关系式

$$(py_i')' - qy_i + \lambda_i\rho y_i = 0,$$

我们有

$$\int_a^b (py_i'^2 + qy_i^2)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [-(py_i')'y_i + qy_i^2]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [-(py_i')' + qy_i]y_i\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \lambda_i \rho y_i y_i \mathrm{d}x = \lambda_i \int_a^b \rho y_i^2 \mathrm{d}x = \lambda_i.$$

由此可知与施图姆－刘维尔问题相应的条件变分问题中泛函的最小值是第一特征值 λ_1，$y_1(x)$是最小函数.

当 λ_1 与 $y_1(x)$求出以后，第二特征值 λ_2 和相应的特征函数 $y_2(x)$也可以用同样的办法求得，它们分别是泛函(5.13)的条件极小值和极小函数. 然而 $y_2(x)$除了满足(5.14)、(5.11)外，还要满足与 $y_1(x)$带权正交的条件

$$\int_a^b \rho y_1 y_2 \mathrm{d}x = 0. \tag{5.17}$$

依次类推，λ_3，$y_3(x)$等特征值和其相应的特征函数都有与 λ_2 及 $y_2(x)$同样的性质. 不过，还要补上相应的正交条件.

对于二维的情形，我们可以考虑同样的问题. 例如，考虑边值问题

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, (x,y) \in B, & (5.18) \\ u|_{\Gamma} = 0, & (5.19) \end{cases}$$

这里 λ 是待定常数，Γ 是区域 B 的边界. 使得方程(5.18)在边界条件(5.19)下，有在 B 中不恒为零的解的那些 λ 值称为这个边值问题的特征值，与它对应的不恒为零的解就是这边值问题的特征函数. 这个特征值问题与求泛函

$$I[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.20}$$

在条件

$$\iint_B u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \tag{5.21}$$

下，满足固定边界条件(5.19)的极小问题有关系. 和前面一样，不难证明：边值问题(5.18)、(5.19)是条件变分(5.20)、(5.21)、(5.19)的欧拉方程及相应的边界条件；这个条件变分的泛函的最小值等于 λ_1——第一个(最小的)特征值，而对应于这个最小值 λ_1 的泛函的最小函数 $u_1(x,y)$就是对应于 λ_1 的特征函数；第二个特征值 λ_2 与特征函数 $u_2(x,y)$也可以从泛函(5.20)的极小问题得到，只是对 u_2 除了要求满足条件(5.21)和(5.19)外，还要加上和 u_1 的正交条件

$$\iint_B u_1 u_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

用类似的方法，可以推出其他特征值与对应的特征函数也有同样的性质，不过还要加上与别的特征函数正交的条件.

§4.6 正定算子的极小泛函

前面各章节的主要工作,是从求泛函的极值问题出发,导出了极值函数组应满足的微分方程(组)——欧拉方程,当然还有与之相应的附加边界条件. 本节,我们将简略地介绍一下这个问题的反问题,即若已知满足一定边界条件的微分方程,能否找到一个与它等价的泛函极小问题呢? 这个问题是一个非常重要的问题. 然而,一般说来,它又是一个很难的问题. 对于这一问题,美国数学家弗里德里希斯(K. Friedrichs)在 1934—1947 年间,完成了漂亮的工作,他证明了: 对于一个正定算子方程,一定能找到一个与其等价的极小泛函.

设算子 A 定义在具有内积的函数集合上[①],如果算子 A 对可取函数集合中的任意两个函数 u,v,恒有

$$(Au,v) = (u,Av)$$

成立,则称算子 A 为对称算子.

如果对于可取函数集合的任一非零元素 u,不等式

$$(Au,u) > 0 \text{[②]} \tag{6.1}$$

成立,那么,A 称为正定算子. 正定算子也可以等价地按下面的方式定义: 如果对于算子 A 的可取函数集合的任何元素 u,不等式

$$(Au,u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2 \tag{6.2}$$

恒成立(这里 γ^2 是个正数),那么 A 称为正定算子. 关于正定算子方程与极小泛函的关系,我们有如下的重要结论:

定理 设 A 是正定对称算子,如果方程

$$Au - f = 0 \tag{6.3}$$

有解 u_0 存在,那么,u_0 必定使泛函

$$F[u] = (Au,u) - 2(u,f) \tag{6.4}$$

取得最小;反之,在定义了内积的可取函数集合[③]中,使泛函(6.4)取得极小的函数 u_0 必定满足方程(6.3).

证明 因为 A 是一个正定算子,故(Au,u)是非负实数,而内积(u,f)也是一个实数,由(6.4)式定义的 $F[u]$是实数,因此,$F[u]$是一个泛函,泛函 $F[u]$ 的可取函数集合就是算子 A 的可取函数集合.

---

① 严格地讲,算子 A 定义在希尔伯特空间的稠密集合上.

② (Au,u)表示 Au 与 u 的内积,它是用定积分来定义的. 参看 §1.2.

③ 可取函数集合是希尔伯特空间.

设 u_0 是方程(6.3)的解,即

$$Au_0 - f = 0. \tag{6.5}$$

再设 v 是算子 A 的可取函数集合中的任一函数,且它可表示为

$$v = u_0 + \alpha\eta, \tag{6.6}$$

此处 α 为实数,η 是 A 的可取函数集合中的任一函数,我们有

$$F[v] = F[u_0 + \alpha\eta] = (A(u_0 + \alpha\eta), u_0 + \alpha\eta) - 2(u_0 + \alpha\eta, f),$$

利用内积的运算性质与算子 A 的对称性质,我们容易得到

$$F[v] = F[u_0] + 2(Au_0 - f, \alpha\eta) + \alpha^2(A\eta, \eta). \tag{6.7}$$

由于(6.5),上式右边中间一项为零,故有

$$F[v] = F[u_0] + \alpha^2(A\eta, \eta). \tag{6.8}$$

因为 A 是一个正定算子,故 $(A\eta, \eta) \geqslant 0$(仅当 $\eta \equiv 0$ 时,取等号),所以有

$$F[v] \geqslant F[u_0] \text{(当 } v = u_0 \text{ 时取等号)},$$

即当 $u = u_0$ 时,泛函 $F[u]$ 取最小值.

反过来,设 u_0 使泛函 $F[u]$ 取得极小值,即对于任意的 $v = u_0 + \alpha\eta$ 都有

$$F[v] \geqslant F[u_0],$$

同本定理的第一部分一样,利用(6.7)式,我们把上式化为

$$2\alpha(Au_0 - f, \eta) + \alpha^2(A\eta, \eta) = F[v] - F[u_0] \geqslant 0.$$

为了保证 $v = u_0 + \alpha\eta$ 的任意性,这里的 η 必须是任意的函数,故若要上式对任意的 η 和任意的 α 成立,则必有

$$(Au_0 - f, \eta) = 0,$$

从而推出

$$Au_0 - f = 0,$$

即 u_0 是算子方程的解. 定理证毕.

下面, 我们举例说明: (1) 如何验证一个算子是不是正定算子;(2) 如何应用这一定理,找出与微分方程定解问题相应的泛函来.

例 1 施图姆-刘维尔型常微分方程的第一类边值问题

$$\begin{cases} Ay \equiv -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y = f(x), & (6.9) \\ y(a) = 0, y(b) = 0,\text{①} & (6.10) \end{cases}$$

---

① 这里给的边界条件还可以改为第二或第三类边界条件.

其中已知函数 $p(x),q(x)$ 满足条件 $p(x)>0,q(x)\geqslant 0,p(x)\in C_{[a,b]}^{(1)},q(x)\in C_{[a,b]}$. 容易证明算子 A 是对称算子(应用分部积分(6.10))与正定算子.

事实上

$$A=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x),$$

$$(Ay,y)=\int_a^b(Ay)y\mathrm{d}x=\int_a^b\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y\right\}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x,$$

上述中的第二步到最后面的等式,用到定积分的分部积分,当 $p(x)>0,q(x)\geqslant 0$ 时,有 $(Ay,y)\geqslant 0$,仅当 $y\equiv 0$ 时,$(Ay,y)=0$,故微分算子 A 为正定算子. 由定理知道,与边值问题(6.9)、(6.10)等价的泛函是

$$\Pi[y(\cdot)]=(Ay,y)-2(y,f)$$

$$=\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2-2f(x)y]\mathrm{d}x. \tag{6.11}$$

例 2 $2k$ 阶常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} Ly=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left[p_j(x)\frac{\mathrm{d}^jy}{\mathrm{d}x^j}\right]=f(x), & (6.12)\\ y(a)=y'(a)=\cdots=y^{(k-1)}(a)=0, & (6.13)\\ y(b)=y'(b)=\cdots=y^{(k-1)}(b)=0, \end{cases}$$

因为有

$$(Ly,y)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\int_a^b y\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left[p_j(x)\left(\frac{\mathrm{d}^jy}{\mathrm{d}x^j}\right)\right]\mathrm{d}x,$$

应用分部积分法,并注意到边界条件(6.13),我们容易得到

$$(Ly,y)=\sum_{j=0}^{k}\int_a^b p_j(x)\left(\frac{\mathrm{d}^jy}{\mathrm{d}x^j}\right)^2\mathrm{d}x,$$

在所有的系数 $p_j(x)$ 都是非负连续的,且为足够阶可微的条件下,可知 L 是一个正定算子. 这时,与边值问题(6.12)、(6.13)等价的泛函是

$$F[y(\cdot)]=(Ly,y)-2(y,f)$$

$$=\int_a^b\left\{\sum_{j=0}^{k}p_j(x)\left(\frac{\mathrm{d}^jy}{\mathrm{d}y^j}\right)^2-2f(x)y\right\}\mathrm{d}x. \tag{6.14}$$

例 3 泊松方程的第一类边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = f(x,y),(x,y) \in B,\\ u|_{\Gamma} = 0,\end{cases}$$

这里 Γ 是 B 的边界.

首先证明 $-\Delta$ 是个正定算子. 事实上,利用格林公式推得等式

$$(-\Delta u,u) = -\iint_B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x-u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y,$$

由 $u|_{\Gamma}=0$ 知上式的第二个线积分等于零,故

$$(-\Delta u,u) = \iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

于是这个边值问题等价的泛函是

$$F[u(\cdot,\cdot)] = (-\Delta u,u)-2(u,f)$$

$$=\iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2uf(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极值问题.

例 4 泊松方程的第一类边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u = f(x,y,z),(x,y,z) \in V, & (6.15)\\ u|_S = 0, & (6.16)\end{cases}$$

这里 S 是 V 的边界面.

先证明 $-\Delta$ 算子是正定的. 事实上,

$$(-\Delta u,u) = -\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}V$$

$$=-\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}u\mathrm{d}S+\iiint_V(\mathrm{grad}\ u)^2\mathrm{d}V,$$

其中 n 是 S 的外法向. 利用(6.16)式,上式变为

$$(-\Delta u,u) = \iiint_V(\mathrm{grad}\ u)^2\mathrm{d}V \geqslant 0,$$

仅当 $u\equiv 0$ 时,上式中的等号才成立,因此边值问题等价于泛函

$$F[u(\cdot,\cdot,\cdot)] = (-\Delta u,u)-2(u,f)$$

$$=\iiint_V[(\mathrm{grad}\ u)^2-2uf(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (6.17)$$

的极值问题.

§4.7　泛函的极值与微分方程

最初,变分问题是作为泛函的最大最小值(或极值)问题而提出来的.古典变分学所研究的问题,主要有下面的三个方面:

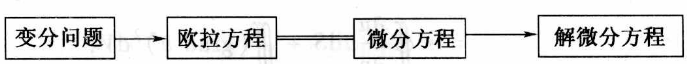
Ⅰ.找出未知的极值函数所满足的必要条件,以便当解存在时,就可以借助于它实际地求出所求的解.关于这一点,我们已经讲了很多,这个必要条件是泛函的一阶变分为零,或者说极值函数必须满足相应的欧拉方程.我们可以用欧拉方程求解一些应用问题.

Ⅱ.求出极值存在的一般的充分条件.

Ⅲ.在曲线满足了基本要求以后,建立一个判别法则,使得根据这个法则,可以判定该曲线是否真正给出了极值,并且当给出极值时,确定是极大还是极小.

从应用数学的角度来说,我们对问题Ⅱ、Ⅲ的研究不如对问题Ⅰ的兴趣来得大.这是因为:一方面,一个实际问题中的变分问题是否有极值,究竟是极大还是极小,这些完全可以根据物理或几何直观来判定.一般地,用必要条件求出来的解,就是实际问题的解.另一方面,也由于变分问题的充分条件及判别法则较之函数极值问题的充分条件和判别法则来要困难得多,一个函数的最大最小值的存在问题,有魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理保证,即在闭区间(域)上连续的函数,在这个闭区间(域)上,一定能取得函数的最大值与最小值,然而在变分学里,关于最大最小的存在问题,就没有这样一条类似的定理.关于Ⅱ、Ⅲ两个问题,我们将在最后第六章中就最简单的变分问题,给以简略地介绍.

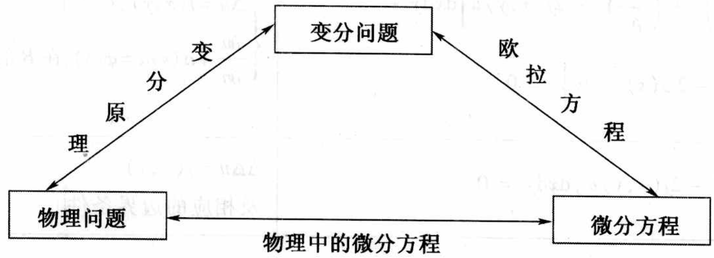
前面我们所论述的,从方法上说,属于经典的研究方法,它的一般过程是



这一套方法在理论研究上是很有意义的,但是,由于求解微分方程精确解并不是都能办得到的,这样就限制了变分法的应用.

随着数学、物理学、力学等自然科学的发展、变分法也发展成了一个不一定局限于只研究泛函极小问题的学科.从物理学、力学的应用问题来说,逗留函数就是要求使泛函取得最小的函数,从而把变分法看成是讨论泛函 $I[u(\cdot)]$ 与它的欧拉方程之间形式上的关系的一种方法.根据这种看法,变分法被认为不过是为了导出或表现一个(或一组)微分方程(欧拉方程)的一种手段.这就是物理

学、力学等各个分支中所谓的变分原理. 物理问题、微分方程和变分问题之间的联系可以用下图表示：



从上述的这些关系中，我们看到了变分法的重要性. 同时，我们也可以看出，如果变分问题能够直接求解（即使是近似解）都将是具有重大意义的事情. 因为这不仅解决了变分问题，而且还可以借助于它，来求解相应的微分方程，也就是说，这将提供一个求解微分方程的新途径. 1900 年希尔伯特在巴黎国际数学家年会上提出了 23 个重大的数学问题，即有名的希尔伯特问题，其中的第 23 个问题就是关于变分问题的直接求解问题. 在 1908 年，里茨（Ritz）给出了一个直接求解变分问题的近似方法. 1915 年，力学家伽辽金（Галёркин）提出了更一般的、应用范围更广的所谓伽辽金方法. 从 20 世纪 50 年代起，开始由结构力学家引入，接着又由许多数学家作了大量工作，而创立的有限单元法，更加丰富并发展了变分法的直接方法. 关于直接方法的具体内容，我们将在下一章给以简略的介绍. 这里不再论述.

本书的主要目的之一，是强调微分方程和变分问题的联系. 为此，我们还列举了许多例题. 现在，将这些结果列在下表中.

泛函的极值与相应的微分方程的联系表

$\delta\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y]\mathrm{d}x=0$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y']-q(x)y=f(x)$ 及相应的边界条件
$\delta\iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$	$\Delta u=f(x,y)$ 及相应的边界条件
$\delta\left[\iint_B\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+cu^2+2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\right.$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)-cu=f$ 及相应的边界条件

续表

$\delta\left\{\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_\Gamma[\sigma(s)u^2-2\varphi(s)u]\mathrm{d}s\right\}=0$	$\begin{cases}\Delta u=f(x,y),\text{在 }B\text{ 内}\\ \frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u=\varphi(s),\text{在 }B\text{ 的边界 }\Gamma\text{ 上}\end{cases}$
$\delta\iint\limits_B[(\Delta u)^2-2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$	$\Delta\Delta u=f(x,y)$ 及相应的边界条件
在条件 $\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x=1$ 及边界条件 $y(a)=y(b)=0$ 的限制下,使泛函 $\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x=\min$ (这里 $p(x)>0,q(x)\geqslant 0$)	$\begin{cases}-[p(x)y']'+q(x)y=\lambda y\\ y(a)=y(b)=0\end{cases}$ (施图姆-刘维尔问题)
设 $u\in C_u^{(2)}=\{u(x,y)\mid u$ 在 B 内二阶连续可微, $u\mid_\Gamma=0\}$,在条件 $\iint\limits_B u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 的限制下,使泛函 $\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min$	$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0,\text{在 }B\text{ 内}\\ u\mid_\Gamma=0\end{cases}$ (特征值问题)
$\delta\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L[\rho u_t^2-ku_x^2+2f(x,t)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}=0$	$\rho u_{tt}-ku_{xx}-f(x,t)=0$
$\delta\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L[\rho u_t^2-ku_{xx}^2+2f(x,t)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}=0$	$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t)$

习 题 四

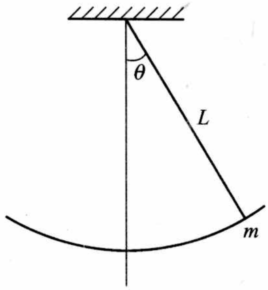
1. 如果第一象限充满某种透明的光介质,而在其中的任一点光的速度等于 $1+x$,求一束光线以最短的时间由原点传播至点(2,3)的光路方程.

2. 设光线在某介质中传播的速度为 $v=\frac{1}{\sqrt{y}}$,求光线自一点 $A_1(x_1,y_1)$ 传到另一点 $A_2(x_2,y_2)$ 的光路.

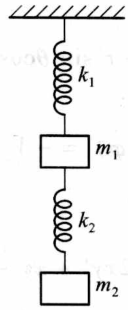
3. 利用哈密顿原理,建立自由落体的微分方程.

4. 利用哈密顿原理,建立单摆运动的微分方程.

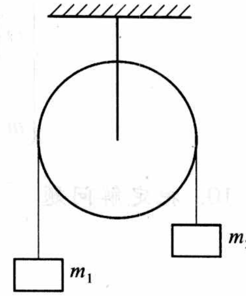
5. 设两个弹簧的弹性系数分别为 k_1,k_2,求串在两个弹簧上的质量分别为 m_1,m_2 的物体的运动微分方程.



第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图

6. 一条不可伸长的绳子跨过一个定滑轮，两端分别挂着两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体，证明两个物体的加速度的数值都是$\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$.

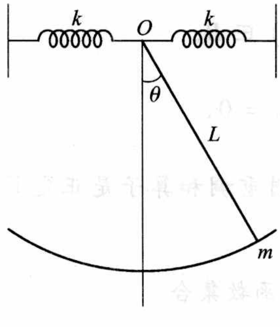
7. 一个单摆的悬挂点为 O，它由弹性系数为 k 的两个弹簧张紧，且它可以沿水平方向无摩擦地滑动.

(1) 求摆的运动方程；

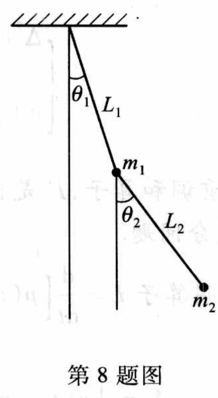
(2) 问在小振动的假定下，该系统的固有频率等于什么？

8. 证明对于小角度 θ_1 和 θ_2（如图所示）的复摆的运动方程是

$$\begin{cases}(m_1 + m_2)L_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\ddot{\theta}_2 = -(m_1 + m_2)g\theta_1, \\ L_1\ddot{\theta}_1 + L_2\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2.\end{cases}$$



第 7 题图



第 8 题图

9. 设在球面坐标系 (r, θ, φ) 中质量为 m 的质点的势能是 $V(r, \theta, \varphi)$，证明该质点的运动方程是

$$
\begin{cases}
m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)=-V_r,\\
m\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})-r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right]=-V_\theta,\\
m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\sin\theta\,\dot{\varphi})=-V_\varphi.
\end{cases}
$$

10. 把定解问题

$$
\begin{cases}
x^2y''+2xy'+xy-x=0,\\
y(a)=y_1,\quad y(b)=y_2
\end{cases}
$$

化为等价的变分问题.

11. 求特征值问题

$$
\begin{cases}
y''+\lambda y=0,\\
y(0)=y(1)=0
\end{cases}
$$

的等价变分问题.

12. 设有定解问题

$$
\begin{cases}
-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),(x,y)\in B,\\
u\,|_{\Gamma}=0,
\end{cases}
$$

其中 Γ 为 B 的边界.证明这里的二维负拉普拉斯算子 $-\Delta$ 是一个正定算子,并求出等价的变分问题.

13. 设有定解问题

$$
\begin{cases}
\Delta^2u=f(x,y),\quad (x,y)\in B,\\
u\,|_{\Gamma}=0,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0,
\end{cases}
$$

其中 Δ^2 为重调和算子,Γ 是区域 B 的边界,证明重调和算子是正定算子,并求出等价的变分问题.

14. 证明算子 $L=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]-q(t)$ 是可取函数集合

$$
A=\left\{u(t)\ \middle|\ u(t)\in C^{(2)}_{[a,b]},\ \begin{matrix}u(a)+h_1u(a)=0\\ u(b)+h_2u(b)=0\end{matrix}\right\}
$$

上的对称算子,其中 h_1,h_2 是常数.

第五章　变分学中的直接方法

§5.1　里 茨 方 法

1. 直接方法的基本概念

由第四章我们知道,数学物理中的变分原理建立了各种类型的微分方程边值问题与泛函极小的等价关系. 在第二章和第三章介绍了各种变分问题的古典解法,即通过解欧拉方程来解变分问题. 然而,因为求解微分方程的边值问题也并非易事,所以这个方法并不能达到希望的结果. 这就向我们提出了必须寻求解变分问题的新方法,即所谓直接方法.

变分学的直接方法是指不通过解欧拉方程而直接近似地求解变分问题的方法. 这些方法最先大量用来解弹性力学问题,随着电子计算机的广泛使用,计算机方法的发展,现今变分学的直接方法已有多种,它们的应用也越来越广. 变分法直接方法的发展,不仅仅直接对变分问题有益,而且对数学的其他分支特别是对微分方程,也有着重大的意义. 在这一章里,我们只讲述几个最重要、最常用的直接方法.

为了明确起见,我们研究关于寻求解某个泛函 $J[y]$ 极小的问题. 设这个泛函的可取函数集合为 E,为了使问题有意义,我们假设泛函的极小值 u 存在,即

$$J[y^*] = u \qquad (|u| < \infty),$$

$$J[y] \geqslant J[y^*] \quad (y \in E). \tag{1.1}$$

这里的 y^* 是这个问题的精确解. 如果我们能选出一个函数 $\bar{y}, \bar{y} \in E$,并且它的泛函值 $J[\bar{y}]$ 非常接近于 u,那么我们期望 $\bar{y}$ 是问题真解的一个近似,如果我们能找到函数序列 $\{y_n\}$, $y_n \in E(n=1,2,\cdots)$,使得

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n] = u, \tag{1.2}$$

则有理由期望,这样的序列在某种意义上收敛于真解. 我们称这样的函数序列 $\{y_n\}$ 为极小化序列.

一般地说,要证明泛函的极小化序列 $\{y_n\}$ 在某种意义上收敛于 y^* 是个很难的问题. 但当 $J[y]$ 是一个正定算子的等价泛函时,在一定的条件下,可以证明泛函的每一个极小化序列都收敛于真解 y^*. 由 §4.6′可知,数学物理中的很多重

要边值问题所对应的算子是正定算子,它们都有相应的等价泛函.

2. 里茨方法

在讲述里茨方法之前,我们首先分析一个简单的例题.设泛函为

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 (xy'^2 + y^2 - 2y)\,\mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

其可取函数集合

$$E = \{y(x) \mid y(x) = ax(1-x),\quad a \in \mathbf{R}\}.$$

试求函数 $Y(x) \in E$,使

$$I[Y(\cdot)] = \min_{y \in E} I[y(\cdot)].$$

关于这个变分问题,我们只需要将函数

$$y = ax(1-x)$$

代入泛函(1.3),立即把变分问题化为普通函数的极值问题.事实上,由

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 [xa^2(1-2x)^2 + a^2x^2(1-x)^2 - 2ax(1-x)]\,\mathrm{d}x$$

得

$$I[y(\cdot)] = \frac{1}{5}a^2 - \frac{1}{3}a,$$

再由$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \frac{2}{5}a - \frac{1}{3} = 0$,得到 $a = \frac{5}{6}$.最后求得

$$Y = \frac{5}{6}x(1-x).$$

如果泛函的可取函数集合为

$$A = \{y(x) \mid y(x) = a_1x(1-x) + a_2x^2(1-x)\},$$

那么将 $y = a_1x(1-x) + a_2x^2(1-x)$ 代入泛函(1.3),同样可以把变分问题化为二元函数的极值问题.

由此可见,如果泛函 $J[y]$ 的可取函数集合是依赖于 n 个任意参数的函数族

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

将其代入泛函 $J[y]$,经过必要的代数运算及微积分运算,我们就能把变分问题变为以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为变量的 n 元函数的极值问题.

变分学直接方法的关键一步是建立极小化序列.而里茨方法是流行的直接方法中的一种,它提供了构造极小化序列的有效方法.我们现在叙述它的思想方法.

设泛函

$$J = J[y] \tag{1.4}$$

在其可取函数集合 E 上有极小值. 为了得到极小化序列 $\{y_n\}$,我们选取坐标函数序列

$$\{\varphi_i\}, \quad \varphi_i \in E \quad (i = 1,2,\cdots,n,\cdots),$$

它是独立的,完备的①(或为正交完备系). 用这些坐标函数的前 n 个函数的线性组合

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\varphi_i \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{1.5}$$

来实际地构造极小化序列. 其中 a_{ni} 是待定常数——谓之里茨系数.

将(1.5)代入泛函(1.4),进行必要的微分和积分运算后,积掉自变量,可得 n 元函数

$$J[y_n] = J_n(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}). \tag{1.6}$$

里茨系数 $a_{ni}(i=1,2,\cdots,n)$ 的确定方法是:要求它们使 n 元函数 $J_n(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$ 的值取得极小. 这样,我们就将泛函的极小问题,化为普通多元函数的极小问题了. 使 J_n 达到极小的必要条件是

$$\frac{\partial J_n}{\partial a_{ni}} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{1.7}$$

方程组(1.7)是由含 n 个未知数 $a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}$ 的 n 个代数方程组成的,叫做里茨方程组. 若求得里茨方程组(1.7)的解

$$a_{ni} = \bar{a}_{ni} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

代入(1.5)式,就可得

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ni}\varphi_i \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{1.8}$$

显然,这样求得的 $\{y_n\}$ 是个极小化序列,而 y_n 就是问题精确解的一个近似.

我们可以用坐标函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 来构成一系列提供精确解的近似函数

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}\varphi_1, \\ y_2 = a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2, \\ y_3 = a_{31}\varphi_1 + a_{32}\varphi_2 + a_{33}\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \cdots + a_{nn}\varphi_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{1.9}$$

---

① 关于独立的和完备的概念,参考 §1.2,如果选取的坐标函数不完备,则无论按里茨方法取多少次近似,它与所要求的结果仍可能相差很大.

其中 a_{ij} 为待定系数，用和求(1.3)中 Y 系数一样的办法来确定这些系数. 我们称 y_1 为精确解的一级近似，y_2 为二级近似，…，y_n 为 n 级近似，等等. 一般地说，里茨方法收敛的速度很快，用一级或二级近似常能达到适当要求的精度.

3. 例题

例 1 用里茨方法求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\,dx = \min \tag{1.10}$$

的近似解，其可取函数集合为

$$E = \left\{ y(x) \middle| \begin{array}{l} y(x) \in C^{(1)}_{[0,1]} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{array} \right\}.$$

解 取坐标函数系①

$$\varphi_i(x) = (1-x)x^i \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

它是独立的、完备的，且满足边界条件 $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$，当然 $\varphi_i(x) \in E(i = 1, 2,\cdots,n,\cdots)$. 令其 n 级近似解的形式为

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(1-x)x^i,$$

即

$$y_n = x(1-x)(a_{n1} + a_{n2}x + \cdots + a_{nn}x^{n-1}), \tag{1.12}$$

其中 $a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}$ 为待定系数. 将(1.12)代入泛函(1.10)，经过代数运算、微分运算与积分运算后，得到依赖 n 个参数 $a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}$ 的函数

$$I[y_n(\cdot)] = I_n(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}),$$

上式达到极小的必要条件是

$$\frac{\partial I_n}{\partial a_{ni}} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.13}$$

由此获得里茨方程组.

下面，我们来具体计算这个问题的一级近似解和二级近似解，并把它和精确解进行比较.

(1) 当 $n = 1$ 时，令其一级近似解为

$$y_1 = a_{11}\varphi_1 = a_{11}x(1-x),$$

其中 a_{11} 为待定常数. 将 y_1 的表示式代入泛函(1.10)，并计算出积分，有

$$I_1(a_{11}) = \int_0^1 (y_1'^2 - y_1^2 - 2xy_1)\,dx$$

① 坐标函数的取法，我们将在本节第五部分介绍.

$$= \int_0^1 [a_{11}^2(1-2x)^2 - a_{11}x(1-x)^2 - 2x^2 a_{11}(1-x)]\,dx$$

$$= \frac{3}{10}a_{11}^2 - \frac{1}{6}a_{11},$$

里茨方程为

$$\frac{dI_1}{da_{11}} = \frac{3}{5}a_{11} - \frac{1}{6} = 0,$$

从而得 $a_{11} = \frac{5}{18}$,最后求得一级近似解为

$$y_1 = \frac{5}{18}x(1-x). \tag{1.14}$$

(2) 当 $n=2$ 时,令其二级近似解为

$$y_2 = a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 = a_{21}x(1-x) + a_{22}x^2(1-x)$$

$$= (1-x)(a_{21}x + a_{22}x^2), \tag{1.15}$$

其中 a_{21}, a_{22} 待定,y_2 对 x 求导,有

$$y_2' = -(a_{21}x + a_{22}x^2) + (1-x)(a_{21} + 2a_{22}x),$$

$$2xy_2 = 2(1-x)(a_{21}x^2 + a_{22}x^3),$$

将 y_2, y_2' 代入泛函(1.10)计算得

$$I_2(a_{21}, a_{22}) = \frac{3}{20}a_{21}^2 + \frac{3}{20}a_{21}a_{22} + \frac{13}{210}a_{22}^2 - \frac{1}{12}a_{21} - \frac{1}{20}a_{22},$$

使 $I_2(a_{21}, a_{22})$ 取得极小来决定 a_{21}, a_{22}. 由极值的必要条件,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_2}{\partial a_{21}} = \dfrac{3}{10}a_{21} + \dfrac{3}{20}a_{22} - \dfrac{1}{12} = 0, \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial a_{22}} = \dfrac{3}{20}a_{21} + \dfrac{13}{105}a_{22} - \dfrac{1}{20} = 0, \end{cases}$$

解这个里茨方程组得

$$a_{21} = \frac{71}{369}, \quad a_{22} = \frac{7}{41},$$

代入(1.15)得二级近似解

$$y_2 = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right).$$

下面我们来求这个问题的精确解. 对于这个问题,它的欧拉方程及边界条件分别为

$$y'' + y + x = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

解这个方程,求得精确解为

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

在 $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 三点,比较 y_1, y_2 与精确解 $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$ 的值,我们有

x	y	y_1	y_2
$\frac{1}{4}$	0.044	0.052	0.044
$\frac{1}{2}$	0.070	0.069	0.069
$\frac{3}{4}$	0.060	0.052	0.060

由此可见,一级近似解的误差数量级为 0.01,二级近似解的误差数量级为 0.001.

例 2 弹性矩形柱体的扭转问题.

在研究横截面为矩形的弹性柱体在扭转时,归结出应力函数 $\psi(x,y)$ 满足下列变分问题:

设矩形区域 $B\{(x,y) \mid x \in [-a,a], y \in [-b,b]\}$(如图 5.1.1)的边界曲线用 Γ 表示,在可取函数集合

$$E = \left\{ \psi(x,y) \left| \begin{array}{l} \psi(x,y) \in C_B^{(1)} \\ \psi(x,y)\big|_\Gamma = 0 \end{array} \right. \right\}$$

中,求出 $\psi(x,y)$,它使泛函

$$\Pi = \iint_B \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.16}$$

在其上取极小值. 现用里茨方法求解此变分问题. 取坐标函数

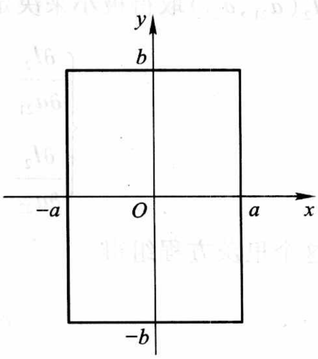


图 5.1.1

$$\omega, \omega x, \omega y, \omega x^2, \omega xy, \omega y^2, \cdots,$$

其中 $\omega=(x^2-a^2)(y^2-b^2)$. 这样选取的 ω,主要是为了保证每一个坐标函数都满足齐次边界条件,因而属于可取函数集合 E. 为了计算简单起见,我们求一级近似解,设

$$\psi_1 = a_{11}(x^2-a^2)(y^2-b^2), \tag{1.17}$$

其中 a_{11} 为待定常数,于是有

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2-4\psi_1=4a_{11}^2[x^2(y^2-b^2)^2+y^2(x^2-a^2)^2]-$$

$$4a_{11}(x^2-a^2)(y^2-b^2),$$

代入泛函(1.16),积分后得

$$\begin{aligned}\Pi_1&=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2-4\psi_1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=16\left[\frac{2}{45}a_{11}^2a^3b^3(a^2+b^2)-\frac{1}{9}a_{11}a^3b^3\right],\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}a_{11}}=0$,解得

$$a_{11}=\frac{5}{4}\frac{1}{a^2+b^2},$$

故

$$\psi_1=\frac{5}{4}\frac{1}{a^2+b^2}(x^2-a^2)(y^2-b^2). \tag{1.18}$$

当然还可以进一步求二级近似、三级近似等,建议读者作为练习独立完成.

4. 里茨方法的公式化过程

里茨方法的一个优点,是它便于公式化. 当坐标函数取定之后,求解里茨系数的过程,能方便地在计算机上进行计算. 下面举例说明这个一般过程.

例 3 用里茨方法解

$$I[y(\cdot)]=\int_0^L(py'^2+qy^2+2fy)\mathrm{d}x=\min, \tag{1.19}$$

其中 $p>0,q\geqslant0,f$ 均为 $x(x\in[0,L])$ 的连续函数,可取函数集合为

$$E=\left\{y(x)\,\middle|\,\begin{array}{l}y(x)\in C_{[0,L]}^{(1)}\\ y(0)=y(L)=0\end{array}\right\}.$$

解 设取定坐标函数 $\varphi_k(x)\in E(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$,且它是完备的、独立的,假设变分问题的 n 级近似解为

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,\text{①} \tag{1.20}$$

其中 a_k 待定. 将(1.20)代入(1.19),经过代数与微积分的运算,有

$$\begin{aligned} I[y_n] &= \int_0^L (p y_n'^2 + q y_n^2 + 2 f y_n)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L \left[p\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi'_k\right)^2 + q\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right)^2 + 2f\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right]\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k,s=1}^{n} \alpha_{ks} a_k a_s + 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k a_k, \end{aligned} \tag{1.21}$$

其中

$$\alpha_{ks} = \alpha_{sk} = \int_0^L (p\varphi'_k\varphi'_s + q\varphi_k\varphi_s)\,\mathrm{d}x, \tag{1.22}$$

$$\beta_k = \int_0^L f\varphi_k \mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

为使 $I[y_n] = \min$,由 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I[y_n]}{\partial a_s} = 0$,即得关于 a_k 的线性方程组为

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks} a_k + \beta_s = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{1.24}$$

将上式改成矩阵形式,有

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}, \tag{1.25}$$

其中系数矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_n \end{pmatrix},$$

---

① 为了在这里推导公式书写简单,把(1.5)中系数 a_{nk} 上为表示近似级数的第一个下标 n 略去,而代之以 a_k,所以(1.5)就变成这里的(1.20).

称 $\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵,向量 $\boldsymbol{a}$ 为广义节点位移,向量 $\boldsymbol{f}$ 为广义节点力. 由 n 元线性方程组(1.24)或(1.25)解出 $a_k=\bar{a}_k$,代入(1.20)得 n 级近似解

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \varphi_k .$$

里茨方法也可用来解偏微分方程边值问题. 设给定了一个偏微分方程的定解问题,如果用这样或那样的方法,能够建立它与某个泛函的极小问题的等价关系,且它是该泛函的欧拉方程,那么,我们用里茨方法近似求解相应的变分问题,就是近似求解这个偏微分方程边值问题.

例 4 用里茨方法求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x,y) = 0, (x,y) \in B, \\ u(x,y) \mid_{\Gamma} = 0 , \end{cases} \tag{1.26}$$

这里 Γ 是区域 B 的边界.

解 我们知道,上述定解问题的等价变分问题是

$$\delta \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{1.27}$$

其可取函数集合为

$$E = \left\{ u(x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} u(x,y) \in C_B^{(1)} \\ u \mid_{\Gamma} = 0 \end{array} \right\},$$

现在用里茨方法解这个变分问题. 如果选好坐标函数系 $\varphi_i(x,y) \in E(i=1,2,\cdots)$,且它是完备的、独立的. 用前 n 个坐标函数的线性组合来构造 n 级近似解,设它为

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x,y), \tag{1.28}$$

其中 a_k 为待定常数,将(1.28)代入(1.27)中的泛函,有

$$\begin{aligned} I[u_n] &= \iint_B \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 + 2fu_n \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_B \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right)^2 + 2f \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sum_{s,k=1}^{n} \alpha_{ks} a_k a_s + 2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k a_k , \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中

$$\alpha_{ks} = \alpha_{sk} = \iint_B \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\beta_k = \iint_B f\varphi_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

里茨系数 a_k 由 $I[u_n] = \min$ 确定. 于是由$\frac{1}{2}\frac{\partial I[u_n]}{\partial a_s} = 0$ 得

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks} a_k + \beta_s = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{1.30}$$

我们也可以把里茨方程组(1.30)用刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、广义节点位移向量 $\boldsymbol{a}$、广义节点力向量 $\boldsymbol{f}$ 表示为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}. \tag{1.31}$$

解关于向量 $\boldsymbol{a}$ 的 n 元线性方程组,求得

$$a_k = \bar{a}_k \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

代入(1.28),即得里茨方法的 n 级近似解

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \varphi_k(x,y).$$

我们在前一章 §4.6 已经知道,二次泛函的欧拉方程是线性微分方程或线性微分方程组. 在此我们又知道,用里茨方法求得的二次泛函的里茨方程组仅是线性代数方程组. 总的来说,解线性代数方程组当然要比解变系数的微分方程组方便些.

5. 坐标函数的选取

应用里茨方法解变分问题时,总是用坐标函数的线性组合来构造 n 级近似解. 选取坐标函数的理论根据是魏尔斯特拉斯的逼近定理. 这一定理指出,对于在闭区间[0,1]上给定的具有连续导数的任意函数 $y(x)$,必定能找到多项式或三角多项式,使它们本身及其导数分别逼近给定的函数 $y(x)$ 和该函数的导数. 也就是说,对于任意 $\varepsilon > 0$,取适当的多项式(或三角多项式)P_n,在[0,1]上有不等式

$$|y(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x) - P'_n(x)| < \varepsilon.$$

对没有边界条件约束的问题,可取坐标函数为

$$\varphi_k = x^k \quad (k = 0,1,2,\cdots), \tag{1.32}$$

或

$$1, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cdots, \cos n\pi x, \sin n\pi x, \cdots. \tag{1.33}$$

函数系(1.32)是完备的、独立的,函数系(1.33)是完备的、正交的.

如果泛函的可取函数必须满足一定的边界条件,则选取的坐标函数$\{\varphi_i\}$也要满足同一边界条件,并且完备、独立(或正交). 例如本节的例1,我们取满足边

界条件

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{1.34}$$

的完备独立坐标函数

$$\omega, \omega x, \omega x^2, \cdots, \omega x^{n-1}, \cdots, \tag{1.35}$$

其中 $\omega = x(1-x)$.

对于同一定解问题,我们也可以选满足边界条件的完备、正交三角函数系

$$\sin \pi x, \quad \sin 2\pi x, \quad \cdots, \quad \sin n\pi x, \quad \cdots \tag{1.36}$$

作坐标函数. 一般说来,坐标函数的选取不是唯一的,可以有很多种不同的取法.

如果某一变分问题的可取函数满足边界条件

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0, \tag{1.37}$$

则我们可以取满足边界条件的完备、独立的函数系

$$\omega, \omega x, \omega x^2, \cdots, \omega x^{n-1}, \cdots \tag{1.38}$$

为坐标函数系,这里 $\omega = (1-x)^2 x^2$.

如果某一变分问题的可取函数必须满足边界条件

$$y'(0) = y'(1) = 0,^{①} \tag{1.39}$$

则可以取满足边界条件的完备、独立的函数系

$$1, \quad 2x^3 - 3x^2, \quad (1-x)^2 x^2, \quad (1-x)^2 x^3, \quad \cdots, \quad (1-x)^2 x^n, \cdots \quad (n \geqslant 2)$$

为坐标函数系,或者也可以取完备、正交的函数系

$$1, \quad \cos \pi x, \quad \cos 2\pi x, \quad \cdots, \quad \cos n\pi x, \quad \cdots$$

为坐标函数系.

如果某一变分问题的可取函数必须满足边界条件

$$y'(0) - h_0 y(0) = 0, \quad y'(1) + h_1 y(1) = 0,^{②} \tag{1.40}$$

则可以取满足边界条件的完备、独立函数系

$$\varphi_0 = x^2\left(x - 1 - \frac{1}{2+h_1}\right), \quad \varphi_1 = (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2+h_0}\right), \cdots,$$

$$\varphi_k = x^k (1-x)^2 \quad (k \geqslant 2) \tag{1.41}$$

为坐标函数系.

对于重积分的泛函(即对于偏微分方程的定解问题),在多数情况下,取多

---

① 边界条件(1.39)常以自然边界条件出现.

② 它可作为更一般泛函的自然边界条件出现,参看 §3.4.

项式作坐标函数较为方便.我们仍研究例4,其泛函为

$$I[u(\cdot,\cdot)]=\iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2uf\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1.42}$$

可取函数集合为

$$E=\left\{u(x,y)\left|\begin{array}{l}u(x,y)\in C_B^{(1)}\\ u\big|_\Gamma=0\end{array}\right.\right\},$$

其中 Γ 为区域 B 的边界.对于 Γ 的不同形式,我们说明相应的坐标函数应当如何取.

(1) Γ 为矩形区域 B 的边界(见图5.1.1).

幂函数的最一般的形式是

$$1,x,y,x^2,xy,y^2,x^3,x^2y,xy^2,y^3,\cdots. \tag{1.43}$$

但是它不能作为我们这个问题的坐标函数,因为它不满足边界条件.为了使它满足边界条件,令

$$\omega=(x^2-a^2)(y^2-b^2),$$

因此,我们可以取矩形区域的坐标函数为

$$\omega,\omega x,\omega y,\omega x^2,\omega xy,\omega y^2,\omega x^3,\omega x^2y,\omega xy^2,\omega y^3,\cdots.$$

如果所考虑的区域是对称的,且 $f(x,y)$ 对 x,y 都是偶函数,则可以去掉其中的一些项,例如取坐标函数为

$$\omega,\omega x^2,\omega y^2,\omega x^4,\omega x^2y^2,\omega y^4,\cdots.$$

(2) Γ 为圆 $x^2+y^2=a^2$.

显然,不能取(1.43)作为 Γ 围成的区域内的坐标函数,因为它不满足边界条件,为此,令

$$\omega=a^2-x^2-y^2,$$

所以,我们取由圆 Γ 围成的圆域的坐标函数为

$$\omega,\omega x,\omega y,\omega x^2,\omega xy,\omega y^2,\omega x^3,\omega x^2y,\omega xy^2,\cdots.$$

(3) Γ 为两个圆 $x^2+y^2=a^2$ 以及 $x^2+y^2-ax=0$ 的周界曲线,区域为此两圆围成的阴影区(图5.1.2).故取

$$\omega=(a^2-x^2-y^2)(x^2+y^2-ax),$$

则坐标函数为

$$\omega,\omega x,\omega y,\omega x^2,\omega xy,\omega y^2,\omega x^3,\omega xy^2,\cdots.$$

总的来说,对拉普拉斯方程的第一类边值问题,当 ω 在 $B+\Gamma$ 上连续,且

$$\omega\big|_\Gamma = 0,$$

$$\omega > 0, \quad 当(x,y)\in B,$$

ω_x,ω_y 在 B 上连续有界. 可以证明,取上述的坐标函数,再用里茨方法构成的极小化序列收敛于真解.

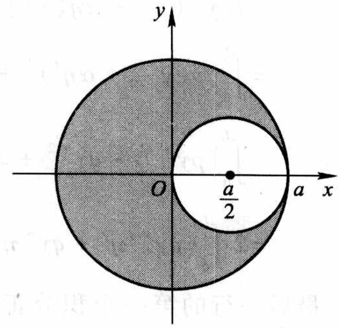


图 5.1.2

*6. 收敛性的证明

由本节第一部分知道 $y_n(x)$ 是 $I[y(\cdot)]$ 的极小化序列,意思是指当 $n\to\infty$ 时,$I[y_n(\cdot)]$ 收敛于泛函的极小值 $I[y^*(\cdot)]=\mu$,y^* 是问题的真解. 要证明用里茨方法构造的极小化序列收敛于真解,一般说来是困难的,需要运用泛函分析的理论. 因此,对于收敛性问题我们不作一般的论述,而仅证明例 3 的极小化序列收敛于问题的真解.

我们知道边值问题

$$\begin{cases}(p(x)y')' - q(x)y = f(x) \quad (p>0, q\geqslant 0), & (1.44)\\ y(0) = y(L) = 0, & (1.45)\end{cases}$$

和在可取函数集合

$$A = \left\{ y(x) \,\middle|\, \begin{array}{l} y(x)\in C^{(1)}_{[0,L]} \\ y(0)=y(L)=0 \end{array} \right\}$$

上,使得

$$I[y(\cdot)] = \int_0^L (py'^2 + qy^2 + 2fy)\,\mathrm{d}x = \min \tag{1.46}$$

的变分问题是等价的.

我们证明,若用里茨方法构造的 y_n 是极小化序列,则 y_n 收敛于真解 y^*. 即若

$$\lim_{n\to\infty} I[y_n(\cdot)] = I[y^*(\cdot)],$$

则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y^*. \tag{1.47}$$

事实上,因为 y^* 满足(1.44),y^*,y_n 和 $\eta(x)$ 满足(1.45)($\eta(x)$ 是任意可微函数),我们用 $y^*+\alpha\eta(x)$ 表示 y^* 的邻近可取函数,则

$$
\begin{aligned}
&I[y^*(\cdot)+\alpha\eta(\cdot)]-I[y^*(\cdot)]\\
&=\int_0^L[p(y^{*\prime}+\alpha\eta')^2+q(y^*+\alpha\eta)^2+2f(x)(y^*+\alpha\eta)]\mathrm{d}x-\\
&\quad\int_0^L(py^{*\prime 2}+qy^{*2}+2fy^*)\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^L(py^{*\prime}\eta'+qy^*\eta+f\eta)\alpha\mathrm{d}x+\int_0^L(p\eta'^2+q\eta^2)\alpha^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

上式最后一行的第一个积分正好是泛函(1.46)的一阶变分 δI,它的值应该是零. 所以当我们取 $y_n=y^*+\alpha\eta$ 时,有

$$
I[y_n(\cdot)]-I[y^*(\cdot)]=\int_0^L[p(y_n'-y^{*\prime})^2+q(y_n-y^*)^2]\mathrm{d}x, \tag{1.48}
$$

在 $p(x)\geqslant\mu>0, q(x)\geqslant 0$(其中 μ 为某一正数)的条件下,由(1.48)求得

$$
\int_0^L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_n-y^*)\right]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\mu}\{I[y_n(\cdot)]-I[y^*(\cdot)]\}. \tag{1.49}
$$

因为

$$
|y_n-y^*|=\left|\int_0^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_n-y^*)\mathrm{d}x\right|,
$$

对上式右边应用柯西不等式

$$
\left|\int_0^x f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left\{\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^x\varphi^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}},
$$

在这里只需取

$$
f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_n-y^*),\quad \varphi(x)=1,
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
|y_n-y^*|&\leqslant\left\{\int_0^x\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_n-y^*)\right]^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^x 1^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\mu}}\{I[y_n(\cdot)]-I[y^*(\cdot)]\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

上面最后一步用到(1.49). 这样,我们就证明了 y_n 一致收敛于真解 $y^*(x)$ 的结论.

§5.2 伽辽金方法

现在我们介绍另一个重要的近似方法——伽辽金方法.

假定我们要求微分方程定解问题

$$\begin{cases} L(u) = 0, \\ B(u) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

的解,其中 L 是一个微分算子,B 是某个边界条件.

和里茨方法一样,我们先取坐标函数系 $\{\varphi_i\}$,这里 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 是满足边界条件的函数系,它们是线性无关的(或正交的)、完备的. 设问题的 n 级近似解是坐标函数系前 n 个坐标函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合,即

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i, \tag{2.2}$$

其中 a_i 为待定系数——谓之伽辽金系数.

如果 u_n 是我们所研究的问题的精确解,则 $L(u_n)$ 必恒等于零,这相当于 $L(u_n)$ 与函数系 $\{\varphi_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 的一切函数正交. 但是一般说来,我们只要待定 n 个伽辽金系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 就行了,因此,只需要 n 个正交条件. 我们取 $L(u_n)$ 与前 n 个坐标函数正交,便得到下列方程组

$$(L(u_n),\varphi_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{2.3}$$

括号(,)表示内积 $(L(u_n),\varphi_i)$,而函数的内积是 $\int_\Omega L(u_n)\varphi_i \mathrm{d}\Omega$, 其中 Ω 为函数 u 的定义域. 方程组(2.3)即为

$$\left(L\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j\right),\varphi_i\right) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{2.3$'$}$$

将(2.3)或(2.3)$'$积分后,得到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的代数方程组,解这个方程组,我们把它的解 $a_i=\bar{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 代入(2.2),得到问题(2.1)的一个 n 级近似解

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i\varphi_i. \tag{2.4}$$

为了进一步说明这个方法,下面举几个简单例子.

例 1 用伽辽金方法解 §5.1 的例 1,即求解微分方程

$$\begin{cases} L(y) = y'' + y + x = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

解 和里茨方法一样,在这里我们选与前节同样的坐标函数,并求同样形式的近似解

$$y_n = x(1-x)(a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}),$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为待定系数.

取 $n=1$,即求一级近似解,令它为

$$y_1 = a_1 x(1-x),$$

由公式(2.3)我们得到决定 a_1 的方程为

$$(L(y_1),\varphi_1) = \int_0^1 L(y_1)\varphi_1 \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 [-2a_1 + a_1 x(1-x) + x] x(1-x) \mathrm{d}x = 0,$$

经过积分得

$$-\frac{3}{10}a_1 + \frac{1}{12} = 0,$$

由此求得 $a_1 = \dfrac{5}{18}$,故求得一级近似解为

$$y_1 = \frac{5}{18}x(1-x).$$

若取 $n=2$,即求二级近似解,令它为

$$y_2 = x(1-x)(a_1 + a_2 x),$$

其中 a_1, a_2 待定. 将 y_2 代入(2.5),有

$$L(y_2) = -2a_1 + a_2(2-6x) + x(1-x)(a_1+a_2x) + x.$$

再由公式(2.3)或(2.3)′,a_1, a_2 应满足的方程组为

$$\begin{aligned}(L(y_2),\varphi_1(x)) &= \int_0^1 L(y_2)\varphi_1(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [-2a_1 + a_2(2-6x) + \\ &\quad x(1-x)(a_1+a_2x) + x] a_1 x(1-x)\mathrm{d}x \\ &= 0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}(L(y_2),\varphi_2(x)) &= \int_0^1 L(y_2)\varphi_2(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [-2a_1 + a_2(2-6x) + \\ &\quad x(1-x)(a_1+a_2x) + x] x^2 a_2(1-x)\mathrm{d}x \\ &= 0,\end{aligned} \tag{2.7}$$

把(2.6)和(2.7)两式进行积分,便得到 a_1, a_2 的伽辽金方程组

$$\begin{cases}\dfrac{3}{10}a_1+\dfrac{3}{20}a_2=\dfrac{1}{12},\\[2mm]\dfrac{3}{20}a_1+\dfrac{13}{105}a_2=\dfrac{1}{20},\end{cases}$$

由此解得

$$a_1=\frac{71}{369},\quad a_2=\frac{7}{41},$$

故要求的二级近似解为

$$y_2=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right).$$

这里得到的结果与前节用里茨方法得到的结果完全一样. 一般说来,如果微分方程(2.1)和相应的边界条件恰好是某个变分问题的欧拉方程及其边界条件,并且当我们选取的坐标函数也相同的时候,用伽辽金方法与用里茨方法所得到的代数方程组,在很多情况下都是一样的,因而导出相同的近似解. 不过用伽辽金方法计算通常要简单一些. 虽然这两种近似方法有某些类同的地方,但是还有区别. 伽辽金方法可以成功地用到各种类型的方程上去,例如椭圆型、双曲型、抛物型的微分方程,甚至那些和变分完全无关的微分方程问题,都可以使用伽辽金方法,这是该方法比里茨方法优越的地方. 然而仅从形式上看,这两种近似方法的区别之处,只是确定系数的方法不同罢了.

伽辽金方法也可用来近似求解偏微分方程的定解问题,例如

$$\begin{cases}\Delta u=-2,\\ u|_{\Gamma}=0,\end{cases}\quad (x,y)\in B, \tag{2.8}$$

其中 B 为矩形区域,即 $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}x\in[-a,a]\\ y\in[-b,b]\end{matrix}\right\}$,$\Gamma$ 为矩形区域 B 的边界.

现在我们用伽辽金方法求定解问题(2.8)的近似解,(2.8)具有明显的对称性,故我们取坐标函数为

$$\omega,\omega x^2,\omega y^2,\omega x^4,\omega x^2y^2,\omega y^4,\cdots,$$

其中 $\omega=(a^2-x^2)(b^2-y^2)$,设 n 级近似解为

$$u_n=(a^2-x^2)(b^2-y^2)\left[a_{11}+a_{21}x^2+a_{22}y^2+\cdots+a_{n1}x^{2(n-1)}+a_{n2}x^{2(n-2)}y^2+\cdots+a_{nn}y^{2(n-1)}\right],$$

若先求一级近似解,即令 $n=1$,则有

$$u_1=a_1(a^2-x^2)(b^2-y^2),$$

按(2.3)式,得决定 a_1 的方程

$$(\Delta u_1 + 2, a_1(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)) = 0,$$

即

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[-2(b^2 - y^2)a_1 - 2(a^2 - x^2)a_1 + 2]a_1(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

积分后,得到关于 a_1 的代数方程

$$-\frac{128}{45}a^3b^3(a^2 + b^2)a_1 + \frac{32}{9}a^3b^3 = 0,$$

由此得到

$$a_1 = \frac{5}{4(a^2 + b^2)},$$

故一级近似解为

$$u_1(x,y) = \frac{5}{4}\frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2}.$$

求二级以上近似解的方法步骤与以上求一级近似解的方法步骤完全相同,只不过计算量大一些. 如果 B 是个正方形区域,即当 $a = b$ 时,由于对称性,第二级近似应取如下形式

$$u_2(x,y) = (a^2 - x^2)(a^2 - y^2)[a_1 + a_2(x^2 + y^2)].$$

经过详细的计算,可得

$$a_1 = \frac{5}{8}\cdot\frac{259}{277}\cdot\frac{1}{a^2},\quad a_2 = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{35}{277}\cdot\frac{1}{a^4}.$$

于是二级近似解为

$$u_2(x,y) = \frac{35}{16\times 277a^2}(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)\left(74 + 15\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right).$$

§5.3 化为常微分方程的解法——半解析法

苏联数学家康托诺维奇(D. B. Канторович)于1933年提出将重积分的变分问题化为常微分方程的解法,或者叫做半解析法. 这个方法介于求问题的精确解和里茨方法或伽辽金方法之间,它实质上是里茨方法的推广,主要是用来处理多变量泛函的极值问题. 下面我们举例说明:化为常微分方程的解法与里茨方法的联系以及它是如何从里茨方法推广而来的.

例 1 求解矩形区域

$$B = \{(x,y) \mid x \in (-a,a) \quad y \in (-b,b)\}$$

上的泊松方程

$$\Delta u = -1, \quad (x,y) \in B, \tag{3.1}$$

且它满足边界条件

$$u\big|_{\Gamma} = 0,$$

这里 Γ 为矩形 B 的边界. 这个定解问题对应的变分问题是

$$J[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B (u_x^2 + u_y^2 - 2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min. \tag{3.2}$$

解 (1) 用里茨方法(这里只讲求解过程).

和 §5.2 一样,我们首先取坐标函数

$$\omega, \omega x^2, \omega y^2, \omega x^4, \omega x^2 y^2, \omega y^4, \cdots, \tag{3.3}$$

其中 $\omega = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$,且设 n 级近似解为

$$u_n = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)[a_{11} + a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + \cdots + a_{n1}x^{2(n-1)} + a_{n2}x^{2(n-2)}y^2 + \cdots + a_{nn}y^{2(n-1)}], \tag{3.4}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 为待定常数,然后通过解里茨方程组,确定待定常数 a_{ij},以求出 n 级近似解 u_n.

(2) 化为常微分方程的解法.

同样我们首先选取坐标函数

$$\overline{\omega}, \overline{\omega}y^2, \overline{\omega}y^4, \cdots, \tag{3.5}$$

其中 $\overline{\omega} = b^2 - y^2$. 设 u 的 n 级近似解为

$$u_n = (b^2 - y^2)[f_1(x) + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^{2n}], \tag{3.6}$$

其中 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 不再是里茨方法中的待定常数,而是些待定函数,它们由泛函(3.2)取得极小来确定. 下面我们具体地求出这个问题的一、二级近似解.

(i) 求一级近似解,即令 $n=1$,则有

$$u_1 = (b^2 - y^2)f_1(x), \tag{3.7}$$

将(3.7)代入(3.2)中的泛函,故有

$$J[u_1] = \iint_B (u_{1x}^2 + u_{1y}^2 - 2u_1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-b}^{b} [(b^2 - y^2)^2 f_1'^2 + 4y^2 f_1^2 - 2f_1(b^2 - y^2)]\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[\frac{16}{15} b^5 f_1'^2(x) + \frac{8}{3} b^3 f_1^2(x) - \frac{8}{3} b^3 f_1(x)\right]\mathrm{d}x, \tag{3.8}$$

这样,我们把由重积分定义的泛函的极小问题(3.2)变为由定积分(3.8)定义的最简单泛函的极小问题. 由于(3.8)的欧拉方程是个常微分方程,这样,采用半解析方法就可以把原来的解偏微分方程问题化为解常微分方程的问题.(3.8)的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{32}{15} b^5 f'_1(x)\right] - \frac{16}{3} b^3 f_1(x) + \frac{8}{3} b^3 = 0,$$

即

$$f''_1(x) - \frac{5}{2b^2} f_1(x) = -\frac{5}{4b^2},$$

这个常微分方程的通解为

$$f_1(x) = c_1 \mathrm{ch} \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b} + c_2 \mathrm{sh} \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b} + \frac{1}{2},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 为了使 $u_1(x,y)$ 在 $x = \pm a$ 时也满足边界条件,则有 $f_1(\pm a) = 0$. 我们用它来确定积分常数 c_1, c_2. 于是求得

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right),$$

最后得一级近似解为

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}(b^2 - y^2)\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right).$$

(ii) 求二级近似解. 令 $n = 2$,则有

$$u_2 = (b^2 - y^2)[f_1(x) + f_2(x) y^2], \tag{3.9}$$

将(3.9)代入(3.2)中的泛函得

$$J[u_2] = \iint_B (u_{2x}^2 + u_{2y}^2 - 2u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

把上式在矩形区域 B 上的积分化为对 y 和 x 的累次积分,并积掉 y,可得

$$J[u_2] = I[f_1, f_2] = \int_{-a}^{a} \Phi(x, f_1, f_2, f_1', f_2')\mathrm{d}x, \tag{3.10}$$

其中

$$\Phi = \frac{16}{15}b^5 f_1'^2 + \frac{32}{105}b^7 f_1' f_2' + \frac{16}{315}b^9 f_2'^2 + \frac{8}{3}b^3 f_1^2 + \frac{16}{15}b^5 f_1 f_2 + \frac{88}{105}b^7 f_2^2 - \frac{8}{3}b^3 f_1 - \frac{8}{15}b^5 f_2,$$

泛函(3.10)的欧拉方程为

$$\begin{cases} 28b^2 f_1'' + 4b^4 f_2'' - 70f_1 - 14b^2 f_2 + 35 = 0, & (3.11) \\ 12b^2 f_1'' + 4b^4 f_2'' - 42f_1 - 66b^2 f_2 + 21 = 0. & (3.12) \end{cases}$$

由(3.11)-(3.12)得到

$$16b^2 f_1'' - 28f_1 + 52b^2 f_2 + 14 = 0,$$

从中解出

$$f_2 = \frac{1}{26b^2}(-8b^2 f_1'' + 14f_1 - 7), \tag{3.13}$$

$$f_2'' = \frac{1}{13b^2}(-4b^2 f_1^{(4)} + 7f_1''), \tag{3.14}$$

将(3.13)、(3.14)代入(3.12)有

$$2b^4 f_1^{(4)} - 56b^2 f_1'' + 126f_1 - 63 = 0. \tag{3.15}$$

于是,微分方程(3.15)对应的齐次方程的特征方程为

$$2b^4\rho^4 - 56b^2\rho^2 + 126 = 0,$$

$$(b^2\rho^2)^2 - 28b^2\rho^2 + 63 = 0,$$

故有

$$\rho_1^2 = \frac{25.532\ 562}{b^2}, \quad \rho_2^2 = \frac{2.467\ 437\ 5}{b^2}.$$

因此,(3.11)、(3.12)的通解为

$$f_1(x) = A\mathrm{ch}\,\lambda_1\frac{x}{b} + B\mathrm{sh}\,\lambda_1\frac{x}{b} + C\mathrm{ch}\,\lambda_2\frac{x}{b} + D\mathrm{sh}\,\lambda_2\frac{x}{b} + \frac{1}{2}, \tag{3.16}$$

其中 A,B,C,D 为任意常数,$\lambda_1 = 5.052\ 975\ 5$,$\lambda_2 = 1.570\ 875$;由(3.14)得

$$f_2(x) = \frac{1}{13b_2}\Big[(7-4\lambda_1^2)A\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 x}{b} + (7-4\lambda_1^2)B\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 x}{b} + (7-4\lambda_2^2)C\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 x}{b} + (7-4\lambda_2^2)D\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 x}{b}\Big]. \tag{3.17}$$

为了使 $u_2(x,y)$ 满足边界条件 $u_2(x,y)\big|_{x=\pm a}=0$,故有

$$f_1(\pm a) = f_2(\pm a) = 0, \tag{3.18}$$

由(3.18)可以得到确定任意常数 A,B,C,D 的代数方程组:

$$A\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b} + B\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 a}{b} + C\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b} + D\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 a}{b} = -\frac{1}{2}, \tag{3.19}$$

$$A\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b} - B\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 a}{b} + C\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b} - D\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 a}{b} = -\frac{1}{2}, \tag{3.20}$$

$$A(7-4\lambda_1^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b} + B(7-4\lambda_1^2)\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 a}{b} + C(7-4\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b} + D(7-4\lambda_2^2)\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 a}{b} = 0, \tag{3.21}$$

$$A(7-4\lambda_1^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b} - B(7-4\lambda_1^2)\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 a}{b} + C(7-4\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b} - D(7-4\lambda_2^2)\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 a}{b} = 0, \tag{3.22}$$

(3.19) + (3.20)有

$$A\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b} + C\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b} = -\frac{1}{2}, \tag{3.23}$$

(3.21) + (3.22)有

$$A(7-4\lambda_1^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b} + C(7-4\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b} = 0, \tag{3.24}$$

(3.19) - (3.20)得

$$B\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 a}{b} + D\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 a}{b} = 0, \tag{3.25}$$

(3.21) - (3.22)得

$$B(7-4\lambda_1^2)\operatorname{sh}\frac{\lambda_1 a}{b} + D(7-4\lambda_1^2)\operatorname{sh}\frac{\lambda_2 a}{b} = 0, \tag{3.26}$$

由这些方程组可得

$$A=\frac{4\lambda_2^2-7}{8(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b}},\quad C=\frac{7-4\lambda_1^2}{8(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b}},$$

$$B=D=0,$$

$$f_1(x)=\frac{4\lambda_2^2-7}{8(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b}}\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 x}{b}+\frac{7-4\lambda_1^2}{8(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b}}\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 x}{b}+\frac{1}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{13b^2}\left[\frac{(7-4\lambda_1^2)(4\lambda_2^2-7)}{8(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 a}{b}}\operatorname{ch}\frac{\lambda_1 x}{b}+\right.$$

$$\left.\frac{(7-4\lambda_1^2)(7-4\lambda_2^2)}{8(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 a}{b}}\operatorname{ch}\frac{\lambda_2 x}{b}\right].$$

把得到的 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 的表示式代入(3.9),就得到二级近似解 $u_2(x,y)$.

顺便指出,在用康托诺维奇方法解这个问题时,也可以取(3.3)作为坐标函数系,且设 n 级近似解为

$$u_n=(a^2-x^2)(b^2-y^2)[f_{11}(x)+f_{21}(x)x^2+f_{22}(x)y^2+\cdots+$$

$$f_{n1}(x)x^{2(n-1)}+f_{n2}(x)x^{2(n-2)}y^2+\cdots+f_{nn}(x)y^{2(n-1)}],$$

其中 $f_{ij}(x)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 为关于 x 的待定函数.

一般说来,当我们用化为常微分方程的解法,来求依赖于多个自变量函数 $Z(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的泛函 $I[Z]$ 的极小函数时,首先要选用满足一定边界条件的坐标函数系

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_m)^{①}\quad(k=1,2,\cdots,n,\cdots),$$

其中符号 $\hat{x}_i$ 表示函数 φ_k 不以 x_i 作自变量,而以 $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_m$ 作自变量. 设泛函 $I[Z]$ 的 n 级近似解为

$$Z_n=\sum_{k=1}^{n}f_k(x_i)\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_m),$$

① 也可取 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $k=1,2,\cdots$ 为坐标函数系.

其中 $f_k(x_i)(k=1,2,\cdots,n)$ 为 x_i 的待定函数. 其次把 Z_n 代入泛函 $I[Z]$,并积掉除 $\hat{x}_i$ 外的所有变元,这样我们就把多重积分表示的泛函的变分问题化为依赖于多个函数 $f_1(x_i),f_2(x_i),\cdots,f_n(x_i)$ 的泛函的变分问题,把以偏微分方程作为欧拉方程的变分问题化为以常微分方程(组)作为欧拉方程的变分问题,从而达到把问题简化的目的.

例 2 设 B 是由 $y=\pm kx$ 及 $x=a,x=b$ 所围成的梯形区域(如图 5.3.1),求解下面的定解问题

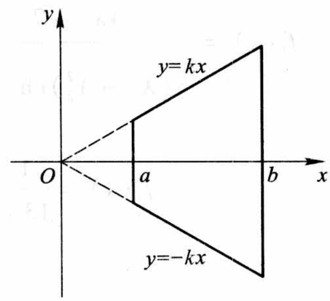


图 5.3.1

$$\begin{cases}\Delta u=-1,(x,y)\in B,\\ u\mid_{\Gamma}=0.\end{cases}$$

这个问题等价的变分问题是

$$I[u]=\iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min. \tag{3.27}$$

如果我们依照化为常微分方程的解法,求一级近似解,可设

$$u_1=(y^2-k^2x^2)f_1(x), \tag{3.28}$$

其中 $f_1(x)$ 是待定函数,这样选得的 u_1 保证在 $y=\pm kx$ 上满足边界条件. 把 (3.28)式代入(3.27)式,并完成对 y 的积分,于是得到

$$I[u_1]=\int_a^b\left[\left(8k^5+\frac{8k^3}{3}\right)x^3f_1^2+\frac{16k^5x^4}{3}f_1f_1'+\frac{16k^5x^5}{15}f_1'^2+\frac{8k^3x^3}{3}f_1\right]\mathrm{d}x,$$

上式的欧拉方程为

$$\frac{2}{5}k^2x^2f_1''+2k^2xf_1'+(k^2-1)f_1=\frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

这个方程在线性常微分方程中也叫欧拉方程. 设它对应的齐次方程的解为 x^v 的形式,为了决定 v,将 x^v 代入对应的齐次方程,得到

$$v(v-1)+5v+\frac{5(k^2-1)}{2k^2}=0,$$

由此

$$v_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{6+\dfrac{10}{k^2}}}{2}. \tag{3.30}$$

这样,我们得到方程(3.29)的通解为

$$f_1 = c_1 x^{v_1} + c_2 x^{v_2} + \lambda,$$

其中

$$v_1 = \frac{-4 + \sqrt{6 + \frac{10}{k^2}}}{2}, \quad v_2 = \frac{-4 - \sqrt{6 + \frac{10}{k^2}}}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{2(k^2 - 1)}.$$

常数 c_1, c_2 可由边界条件 $f_1(a) = f_1(b) = 0$ 决定. 因此,要求的一级近似解为

$$u_1(x,y) = (y^2 - k^2 x^2)(c_1 x^{v_1} + c_2 x^{v_2} + \lambda). \tag{3.31}$$

§5.4 有限元方法简介

我们知道,用直接方法解决变分问题或数学物理中的边值问题,关键的一步是在可取函数空间中选取完备、独立(或正交)的坐标函数

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots.$$

当坐标函数取定之后,我们用前 n 个坐标函数的线性组合

$$u_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n$$

作 n 级近似解,再用里茨方法或伽辽金方法确定系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 这种方法的实质是把在无限维可取函数空间中求解的变分问题或数学物理方程的边值问题转化为在以 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 为基底的 n 维函数空间中来求解,从而把复杂的变分问题或微分方程边值问题化为求解 n 元代数方程组的问题,这样就把被求解的问题大大简化了.

直接方法虽然成功地解决了数学、物理、力学中的很多问题,但是,对于复杂区域、复杂边界条件的变分问题来说,由于选取坐标函数的困难性,因而限制了它对这些问题的应用. 为了克服这一困难,就产生了有限元方法. 这一方法首先由柯朗(R. Courant)于 1943 年提出,但长期以来,未被人们所注意. 后来,由于计算机的出现和广泛使用,以及航空工业和空间科学技术的发展,1956 年以后,有限元方法逐渐被航空结构工程师们所采用,随后,应用到土木结构工程中. 到了 60 年代末,在一切连续场的领域里,这种方法得到越来越广泛的应用. 现在,有限元方法已成为一种有效的数值计算方法.

用有限元方法求解数学物理方程的定解问题,大致要经过如下几个过程:

1. 把原始问题变为变分(或求广义解的变分)问题;
2. 选择适当的元素类型,把求解的问题离散化,并构造相应的形状函数;
3. 单元刚度矩阵的计算和总刚度矩阵的合成;
4. 有限元方程组的求解;

5. 回到实际问题中去.

有限元方法是近似的变分法,它是里茨方法与伽辽金方法的直接推广与发展. 有限元方法是人们在解决复杂区域、复杂边界条件的数学物理边值问题的过程中,找到的一种比较完美的离散化方法. 有限元方法解题的思想方法、步骤与里茨方法、伽辽金方法类似. 但是,和这两个方法比较起来,它的成功在第二步,即以简单的步骤构造坐标函数. 函数的有限元逼近和有限元子空间基函数(坐标函数)的建立,成功地解决了复杂区域、复杂边界条件的数学物理方程的边值问题,克服了里茨方法与伽辽金方法在选取坐标函数方面的困难.

为了说明有限元方法,我们看一个简单的例子. 我们仍以众所周知的薄膜平衡问题为例.

试求一个函数

$$U(x,y) \in B = \left\{ u(x,y) \middle| \begin{matrix} u(x,y) \in C_{\Omega}^{(1)} \\ u(x,y)\mid_{\Gamma} = 0 \end{matrix} \right\},$$

使得泛函

$$J[u(\cdot,\cdot)] = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] - f(x,y)u \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1}$$

取极小值,其中 $u(x,y)$ 为薄膜的位移函数,Γ 为区域 Ω 的边界.

首先,用假想的曲线或直线,将区域 Ω 分割成有限个单元 Ω_e($e=1,2,\cdots,n_e$). 图 5.4.1 是用直线将 Ω 分成 n_e 个三角形,Ω_e 称为第 e 个三角形元素,并且有 $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$. 在每一个三角形上选择有限个节点,按一定次序将全部区域 Ω 内的节点编号①,在第 i 个节点上的函数 $u(x,y)$ 的值记为 u_i($i=1,2,\cdots,n$),用向量

$$\boldsymbol{U} = (u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$$

表示所有节点上的函数值(上标 T 表示向量的转置),它是求解的主要对象. 有限元方法就是要导出用节点值 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 表示的(4.1)的极小化方程. 此时,我们有

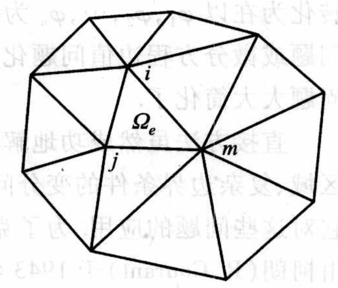


图 5.4.1

$$J = \sum_{e=1}^{n_e} \left\{ \iint_{\Omega_e} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega_e} f(x,y)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right\}, \tag{4.2}$$

而任意一个三角形单元 Ω_e 所涉及的节点函数值以向量 $\boldsymbol{U}_e$ 表示,

① 在边界 Γ 上的节点,位移函数 u 取已知值,它由边界条件给出.

$$U_e = (u_i, u_j, u_m)^{\mathrm{T}}.$$

为了计算出积分(4.2)，在单元 Ω_e 上，以 u_i, u_j, u_m 为参数，用分片一次多项式来逼近 $u(x,y)$，其几何意义是用过三个点：(x_i, y_i, u_i)，(x_j, y_j, u_j) 和 (x_m, y_m, u_m) 的平面来代替 Ω_e 中的曲面 $u = u(x,y)$. 在每一个三角形单元，用 x, y 的一次式

$$\tilde{u}(x,y) = q_1 + q_2 x + q_3 y, \quad (x,y) \in \Omega_e$$

来逼近 $u(x,y)$，即 $u \approx \tilde{u}$，其中，常数 q_1, q_2, q_3 由下列方程组

$$\begin{cases} u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i, \\ u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j, \\ u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m \end{cases} \tag{4.3}$$

确定. 可以算得

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\Delta_e}[(a_i + y_{jm}x + x_{mj}y)u_i + (a_j + y_{mi}x + x_{im}y)u_j + (a_m + y_{ij}x + x_{ji}y)u_m]. \tag{4.4}$$

其中 Δ_e 表示三角形 Ω_e 的面积，并令

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m, \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i, \\ y_{ij} &= y_i - y_j, \\ x_{ij} &= x_i - x_j, \end{aligned} \tag{4.5}$$

可以认为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_e}(y_{jm}u_i + y_{mi}u_j + y_{ij}u_m), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta_e}(x_{mj}u_i + x_{im}u_j + x_{ji}u_m). \end{aligned} \tag{4.6}$$

将(4.6)代入(4.2)可得

$$J[u(\cdot,\cdot)] = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{8\Delta_e^2} \iint_{\Omega_e} [(y_{jm}u_i + y_{mi}u_j + u_{ij}u_m)^2 + (x_{mj}u_i + x_{im}u_j + x_{ji}u_m)^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2\Delta_e}\Big[u_i \iint_{\Omega_e} (a_i + y_{jm}x + x_{mj}y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$u_j \iint_{\Omega_e} (a_j + y_{mi}x + x_{im}y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$u_m \iint_{\Omega_e} (a_m + y_{ij}x + x_{ji}y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big], \qquad (4.7)$$

积分掉 $x, y, f(x,y)$ 后，我们可以把上式形式地写为

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}u_iu_j - \sum_{i=1}^{n} r_iu_i, \qquad (4.8)$$

这样一来，我们把以 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 表示的(4.1)的极小化问题转化为以 u_i 为参变量的多元函数(4.8)的极小化问题，(4.8)的极小化方程为

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0,$$

即为

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}u_j - r_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \qquad (4.9)$$

或用矩阵形式给出，即

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{f},$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 称为刚度矩阵，$\boldsymbol{U}$ 称为广义节点位移，$\boldsymbol{f}$ 称为广义节点力. 因此，人们也称有限元方法为离散的里茨方法.

从数学的角度讲，有限单元法是以变分原理和剖分插值为基础的，剖分插值是成功地处理复杂区域与复杂边界条件的关键，对于同一区域，可以采用不同的剖分，对于某一剖分，可以采用不同的插值函数. 构造插值函数，往往要应用高度的数学技巧. 对此方面感兴趣的读者可以阅读关于有限元的专著.

习 题 五

1. 用里茨方法求泛函

$$J[u(\cdot,\cdot)] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

取极值时的 $u(x,y)$ 的一级近似解. 设此泛函的可取函数集合是 $E = \left\{u(x,y)\,\middle|\, \begin{array}{l} u(x,y)\in C_B^{(2)} \\ u\,|_{\Gamma} = 0 \end{array}\right\}$，其中 B 为正方形区域，即 $B = \left\{u(x,y)\,\middle|\, \begin{array}{l} -a<x<a \\ -a<y<a \end{array}\right\}$，而

Γ 为 B 的边界. 又问此泛函的二级近似解取什么形式?

2. 用里茨方法求泛函

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 (x^3 y''^2 + 100xy^2 - 20xy)\,\mathrm{d}x, \quad y(1) = y'(1) = 0$$

取最小值时的 $y(x)$ 的二级近似解.

3. 用伽辽金方法求微分方程定解问题

$$\begin{cases} xz'' + z' + \dfrac{x^2 - 1}{x} z + x^2 = 0, \\ z(1) = z(2) = 0 \end{cases}$$

的一级近似解.

4. 用里茨方法求特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

的最小特征值和相应的特征函数的近似解,并与该问题的精确解比较.

5. 用伽辽金方法解下面的定解问题

$$\begin{cases} \Delta z = -1, \quad (x, y) \in B, \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

其中 $B = \{(x, y) \mid -a \leqslant x \leqslant a, -a \leqslant y \leqslant a\}$, Γ 为正方形区域 B 的边界.

6. 用伽辽金方法解下面的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = y, \quad (x, y) \in B, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

其中 $B = \{(x, y) \mid -a < x < a, -b < y < b\}$, Γ 为矩形区域 B 的边界.

7. 用伽辽金方法求特征值问题

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = 0, \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$

的第一、第二特征值及相应的特征向量.

8. 用半解析法求泛函

$$J[u(\cdot, \cdot)] = \iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

取最小值时的 $u(x,y)$ 的近似解 $u_1(x,y)$，其中 B 是由 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $x = b$ 所围成的三角形区域，Γ 是 B 的边界.

第六章 极值的充分条件

在第二章和第三章中,我们研究了各种泛函的一阶变分,并得出了泛函的一阶变分为零,是泛函取得极值的必要条件的结论. 由此结论出发,我们导出了各种类型泛函的极值曲线(面)所满足的微分方程——欧拉方程. 通过解欧拉方程,我们求得了一些实际问题的解答. 在变分学中,还有一个大问题,就是能否对由必要条件得到的解,建立一种判别法则,使得能够由它判别这一解是否真的使泛函取得了极值,是取极大值,还是极小值. 这就是极值的充分条件问题. 它比起必要条件来要困难得多. 为了使读者能了解这种问题的研究方法和特点,现在考察具有固定端点的最简单变分问题,即求一个属于某个可取函数集合 S 的函数 $Y(x)$,使得泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{A}$$

在 $y = Y(x)$ 上取得极小值. 今后,我们仍不加声明地假定 $F(x,y,y')$ 对三个变元在 $\Omega \times \mathbf{R}$ 上是二阶连续可导的(其中 Ω 表示 xOy 平面上的一个区域,$\mathbf{R}$ 为实数集合). 这里我们特别要指出的是: 在本章中,泛函(A)的可取函数 S 是 $[x_0,x_1]$ 上的分段光滑函数类(所谓分段光滑,是指将函数 $y(x)$ 的定义区间分成有限个子区间,而 $y(x)$ 在每一个子区间的内部导数连续,在每个子区间的两端点导数单边连续). 记 $[x_0,x_1]$ 上分段光滑的函数类为 $D'[x_0,x_1]$,于是泛函(A)的可取函数集合为

$$S = \left\{ y(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} y(x) \in D'[x_0,x_1] \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{array} \right\}. \tag{B}$$

§6.1 极值问题的分类

1. 强邻域与弱邻域

设 $y = Y(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ 为某一函数类中的已知函数,δ 为与 x 无关的某一正数,我们把该函数类中所有满足关系

$$|y(x) - Y(x)| < \delta, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \tag{1.1}$$

的函数 $y(x)$ 的集合,称为 $y = Y(x)$ 的强邻域,记为 $N_{强}[Y(x),\delta]$,简记为 $N_{强}[Y(x)]$,即

$$N_{强}[Y(x),\delta] = \left\{ y(x) \left| \begin{array}{l} |y(x) - Y(x)| < \delta \\ \forall x \in [x_0, x_1] \end{array} \right. \right\}. \tag{1.2}$$

强邻域这一概念,是为了研究当函数 $y = Y(x)$ 的纵坐标有一个微小的改变量时,泛函(A)究竟变化了多少而引入的,即考察:如果函数从 $Y(x)$ 变到 $y(x) \in N_{强}[Y(x)]$ 时,$J[y(x)]$ 和 $J[Y(x)]$ 之间到底有怎样的关系. 但是(1.1)只是规定了函数的纵坐标作了一个微小的改变,而该函数表示的曲线的斜率的改变量则是任意的. 因此满足(1.1)的 $y(x)$ 也称为和 $Y(x)$ 有零阶接近度(见图 6.1.1 中的虚线). 有时,我们除了对函数纵坐标的改变量作了如(1.1)的规定外,还要求该函数表示的曲线的斜率的改变也应有一定的限制. 我们把所有满足关系

$$\begin{array}{l} |y(x) - Y(x)| < \delta, \\ |y'(x) - Y'(x)| < \delta, \end{array} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \tag{1.3}$$

的函数 $y(x)$ 的集合,称为 $y = Y(x)$ 的弱邻域,记为 $N_{弱}[Y(x),\delta]$,简记为 $N_{弱}[Y(x)]$,即

$$N_{弱}[Y(x),\delta] = \left\{ y(x) \left| \begin{array}{l} |y(x) - Y(x)| < \delta, \\ |y'(x) - Y'(x)| < \delta, \end{array} \right. \quad \forall x \in [x_0, x_1] \right\}. \tag{1.4}$$

称满足(1.3)的 $y(x)$ 和 $Y(x)$ 有一阶接近度(见图 6.1.2 中的虚线).

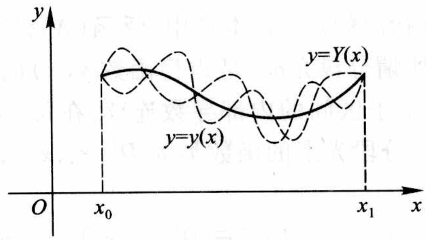


图 6.1.1

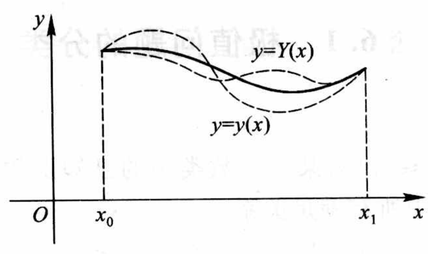


图 6.1.2

在第三章中，我们研究极值的必要条件时，曾假定解曲线 $y=Y(x)$ 的邻近曲线或比较曲线为 $y(x,\alpha)=Y(x)+\alpha\eta(x)$，当 α 充分小时，$y(x,\alpha)\in N_{弱}[Y(x)]$，所以，我们以前研究的理论都是关于取得弱极值的. 在本章中，研究强极值的必要条件时，我们就不能再用这样的比较曲线了，必须重新构造强邻域的比较曲线.

显然，强邻域和弱邻域有如下的关系

$$N_{弱}[Y(x),\delta]\subset N_{强}[Y(x),\delta]. \tag{1.5}$$

2. 强极值和弱极值

如果对于一切 $y(x)\in N_{强}[Y(x)]$，恒有

$$J[Y(x)]\leqslant J[y(x)]$$

成立，则我们称泛函(A)在 $y=Y(x)$ 上取得了强极小. 可以类似地定义强极大.

如果对于一切 $y(x)\in N_{弱}[Y(x)]$，恒有

$$J[Y(x)]\leqslant J[y(x)]$$

成立，则我们称泛函(A)在 $y=Y(x)$ 上取得了弱极小. 类似地还可以定义弱极大.

显然，如果泛函(A)在 $y=Y(x)$ 上取得强极小，则它一定在 $y=Y(x)$ 上取得弱极小，但是，反过来却不一定成立. 即如果泛函在 $y=Y(x)$ 上取得了弱极小，却不一定在 $y=Y(x)$ 上取得强极小.

例如，泛函

$$J[y(\cdot)]=\int_0^1 y'^3\mathrm{d}x$$

满足 $y(0)=0,y(1)=1$ 的极值曲线是 $y=x$，对任意的 $\eta(x)\in D'[0,1]$，且 $\eta(0)=\eta(1)=0$，都有

$$\begin{aligned}J[Y(x)+\eta(x)]=J[x+\eta(x)]&=\int_0^1[1+\eta'(x)]^3\mathrm{d}x\\&=1+\int_0^1\{\eta'^2(x)[3+\eta'(x)]\}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

只要 $|\eta'(x)|<3$，就有

$$J[x+\eta(x)]\geqslant J[x]=1,$$

因而泛函在 $y=x$ 上取得弱极小；但当 $\eta'(x)\leqslant -3$ 时，有

$$J[x+\eta(x)]\leqslant J[x]=1,$$

这说明泛函在 $y=x$ 上不取得强极小.

§6.2 魏尔斯特拉斯函数与勒让德条件

为了建立充分性的理论,我们必须引入两个重要的概念:魏尔斯特拉斯函数和勒让德条件.

设有连续可微的函数 $F(x,y,z)$,我们称表达式

$$F(x,y,\xi) - F(x,y,z) - (\xi - z)F_z(x,y,z)$$

为函数 $F(x,y,z)$ 关于 z 的魏尔斯特拉斯函数,记为 $E(x,y,z,\xi)$. 即

$$E(x,y,z,\xi) = F(x,y,\xi) - F(x,y,z) - (\xi - z)F_z(x,y,z).$$

根据这个定义,泛函(A)的被积函数 $F(x,y,y')$ 关于 y' 的魏尔斯特拉斯函数为

$$E(x,y,y',\xi) = F(x,y,\xi) - F(x,y,y') - (\xi - y')F_{y'}(x,y,y'),$$

如果令 $\xi = y' + u$,则有

$$E(x,y,y',y' + u) = F(x,y,y' + u) - F(x,y,y') - uF_{y'}(x,y,y').$$

下面,我们给魏尔斯特拉斯函数以几何解释. 首先考察一元函数 $F(x)$ 的魏尔斯特拉斯函数

$$E(x,\xi) = F(\xi) - F(x) - F'(x)(\xi - x).$$

它表示曲线 $y = F(x)$ 与其切于点 $(x,F(x))$ 处的切线在 ξ 点的纵坐标之差(见图 6.2.1). 其次考察二元函数 $F(x,y)$ 的魏尔斯特拉斯函数 $E(x,y,\xi) = F(x,\xi) - F(x,y) - F_y(x,y)(\xi - y)$. 它表示曲面 $z = F(x,y)$ 与过点 $A(x,y,F(x,y))$ 处且平行于 zOy 面的平面的交线和该交线于 A 点的切线在 (x,ξ) 点的纵坐标之差(见图 6.2.2). 至于 $F(x,y,y')$ 的魏尔斯特拉斯函数的几何意义可以类推. $E(x,y,y',\xi)$ 在分析上是表示当泛函(A)的被积函数 $F(x,y,y')$ 的变元 y' 改变到 ξ 时,$F(x,y,\xi)$ 在 y' 处的泰勒展开式的前两项 $F(x,y,y') + F_{y'}(x,y,y')(\xi - y')$ 与

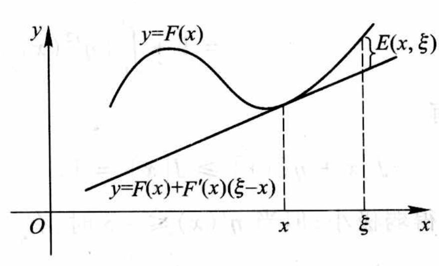


图 6.2.1

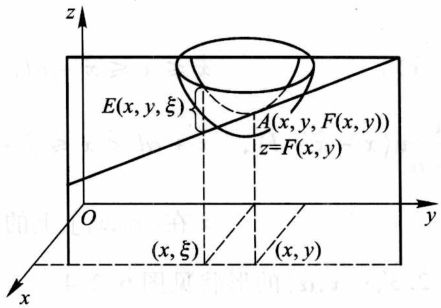


图 6.2.2

$F(x,y,\xi)$的差，这个差可以用泰勒公式的拉格朗日余项

$$\frac{1}{2}F_{y'y'}(x,y,k)(\xi-y')^2 \quad (k\text{ 是介于 }y'\text{ 与 }\xi\text{ 之间的值})$$

来表示. 由此可见，$F_{y'y'}$的符号对$E(x,y,y',\xi)$的符号起着很大的作用，为什么要引入这个概念呢？因为在极值曲线$Y(x)$的强邻域中，虽然$Y(x)$与$y(x)$的差别很小，但$Y'(x)$与$y'(x)$的差别可以很大，这时泛函的改变量的符号自然就与$E(x,y,y',\xi)$的符号有关，故我们引入对y'的魏尔斯特拉斯函数的概念，用以来讨论强极值与弱极值的必要条件和充分条件.

现在，我们用魏尔斯特拉斯函数推导一个强极小的必要条件.

定理 1 设$y=Y(x)$使泛函(A)达到了强极小，则必有

$$E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)+u)\geqslant 0,\quad \forall x\in[x_0,x_1],\quad u\in\mathbf{R},$$

其中$E(x,y,y',\xi)$为泛函(A)的被积函数$F(x,y,y')$的魏尔斯特拉斯函数.

证明 首先，必须构造一族$y=y(x)$的强邻域中的曲线$Y(x)+\eta(x,\alpha)$，而不能采用在第二章中用过的可取曲线$Y(x)+\alpha\eta(x)$. 对于$y(x,\alpha)=Y(x)+\eta(x,\alpha)$，我们要求(1) $\alpha\geqslant 0$；(2) $y(x,0)=Y(x)$（即$\eta(x,0)=0$）；(3) 对所有的$x\in[x_0,x_1]$，均有$|y(x,\alpha)-Y(x)|<\delta$，$\delta$与$x$无关（即$|\eta(x,\alpha)|<\delta$）；(4) $y(x,\alpha)$的斜率与$Y'(x)$之间的关系可以任意. 下面就来构造$y(x,\alpha)$.

任取一个$\tilde{x}\in[x_0,x_1]$，但要求$(\tilde{x},Y(\tilde{x}))$不是角点. 再取$l>0$，使$\tilde{x}+l\in[x_0,x_1]$，并使得曲线$y=Y(x)$限制在$[\tilde{x},\tilde{x}+l]$上的一段亦无角点，令

$$\eta'(x,\alpha)=\begin{cases} u, & \tilde{x}\leqslant x\leqslant\tilde{x}+\alpha l,\\ -\dfrac{\alpha}{1-\alpha}u, & \tilde{x}+\alpha l<x\leqslant\tilde{x}+l\quad(0\leqslant\alpha<1),\\ 0, & x\text{ 在}[x_0,x_1]\text{ 上的其他地方}. \end{cases}$$

由此求出

$$\eta(x,\alpha)=\begin{cases}u(x-\tilde{x}), & \tilde{x}\leqslant x\leqslant \tilde{x}+\alpha l,\\ -\dfrac{\alpha}{1-\alpha}u(x-\tilde{x}-l), & \tilde{x}+\alpha l<x\leqslant \tilde{x}+l \quad (0\leqslant\alpha<1),\\ 0, & x\text{ 在}[x_0,x_1]\text{ 上的其他地方}.\end{cases}$$

$\eta(x,\alpha)$的形状见图 6.2.3，$y(x,\alpha)$的形状见图 6.2.4.

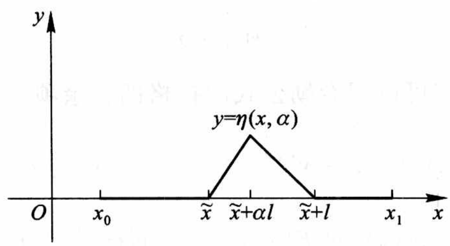


图 6.2.3

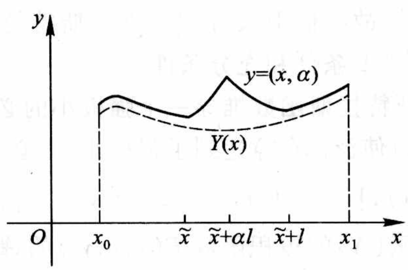


图 6.2.4

显见 $|\eta(x,\alpha)|\leqslant|\alpha lu|=\alpha l|u|$，所以无论 u 是什么实数，只要 α 充分小，则 $|\eta(x,\alpha)|$ 可以相当小，但是 $|y'(x,\alpha)-Y'(x)|=|\eta'(x,\alpha)|$ 可以取任意值. 可见这样构造的 $y(x,\alpha)\in S\cap N_{强}[Y(x)]$，且当 $\alpha=0$ 时，有 $\eta(x,\alpha)=0$. 于是

$$\Phi(\alpha)=J[y(x,\alpha)]-J[Y(x)]$$

在 $\alpha\geqslant 0$ 时为非负，且在 $\alpha=0$ 时，有 $\Phi(0)=0$，这时泛函(A)达到极小值，故有

$$\Phi'(0+)\geqslant 0^{①}.$$

① 因为当 $\alpha>0$ 充分小时，有 $\dfrac{\Phi(\alpha)-\Phi(0)}{\alpha}>0$，故有 $\Phi'(0+)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\Phi(\alpha)-\Phi(0)}{\alpha}\geqslant 0.$

经计算得到

$$\begin{aligned}\Phi'(0+) &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\left\{\int_{x_0}^{x_1}F(x,Y(x)+\eta(x,\alpha),Y'(x)+\eta'(x,\alpha))\mathrm{d}x - \right.\\ &\left.\int_{x_0}^{x_1}F(x,Y(x),Y'(x))\mathrm{d}x\right\}\\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\left\{\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+\alpha l}[F(x,Y(x)+u(x-\tilde{x}),Y'(x)+u) - \right.\\ &F(x,Y(x),Y'(x))]\mathrm{d}x + \int_{\tilde{x}+\alpha l}^{\tilde{x}+l}\left[F\left(x,Y(x)-\frac{\alpha u}{1-\alpha}\cdot\right.\right.\\ &\left.\left.\left.(x-\tilde{x}-l),Y'(x)-\frac{\alpha u}{1-\alpha}\right)-F(x,Y(x),Y'(x))\right]\mathrm{d}x\right\}\\ &= l[F(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x})+u)-F(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x}))] - \\ &\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+l}[\overline{F}_y\cdot u(x-\tilde{x}-l)+\overline{F}_{y'}u]\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.1}$$

对上式的后一项用分部积分,于是有

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+l}\overline{F}_{y'}u\mathrm{d}x &= F_{y'}u(x-\tilde{x}-l)\Big|_{x=\tilde{x}}^{x=\tilde{x}+l} - \\ &\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+l}u(x-\tilde{x}-l)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\mathrm{d}x\\ &= luF_{y'}(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x})) - \\ &\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+l}u(x-\tilde{x}-l)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

将上式代入(2.1)并注意到$\overline{F}_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}=0$,即得

$$\begin{aligned}\Phi'(0^+) &= l[F(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x})+u)-F(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x}))\\ &\quad -uF_{y'}(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x}))]\\ &= lE(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x}),Y'(\tilde{x})+u)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

因为 $l>0$,故有

$$E(\tilde{x},Y(\tilde{x}),Y'(\tilde{x}),Y'(\tilde{x})+u)\geqslant 0, \tag{2.3}$$

这就证明了在 $y=Y(x)$ 上的非角点处定理的结论是正确的. 至于在角点处及端点处,只要在(2.3)式中取极限,即令 $\tilde{x}$ 趋于角点或端点的横坐标时,则 E 函数的非负性仍不变化,即(2.3)式仍然正确. 定理证毕.

例 1 考察满足 $y(0)=0, y(1)=1$ 的泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^3 \mathrm{d}x$$

的极值曲线,使泛函达到了强极小,还是弱极小.

解 因为泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y'^2 = 0,$$

其解为

$$y = c_1 x + c_2,$$

由边界条件可知极值曲线为

$$y = x \quad (Y(x) \equiv x).$$

沿此曲线的魏尔斯特拉斯函数为

$$E(x, Y(x), Y'(x), Y'(x)+u) = (1+u)^3 - 1 - 3u = u^2(u+3),$$

当 $u+3<0$ 时,$E(x, Y(x), Y'(x), Y'(x)+u)<0$,本定理的结论不能满足,这说明极值曲线 $y=x$ 绝对不可能使泛函取得强极小.

然而可以看出极值曲线 $y=x$ 却使泛函达到弱极小. 因为,对于任取的一个满足 $\eta(0)=\eta(1)=0$ 的函数 $\eta(x) \in D'[0,1]$ 来说都有

$$\begin{aligned} J[Y(x)+\eta(x)] &= \int_0^1 [1+\eta'(x)]^3 \mathrm{d}x \\ &= 1 + 3\int_0^1 \eta'(x)\mathrm{d}x + 3\int_0^1 [\eta'(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 [\eta'(x)]^3 \mathrm{d}x \\ &= 1 + \int_0^1 [\eta'(x)]^2 \cdot [3+\eta'(x)] \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

只要 $|\eta'(x)| \leqslant 3$ 时,可取曲线 $y(x) = x + \eta(x)$ 已构成了一个 $y=x$ 的弱邻域,且恒有

$$J[y(x)] \geqslant J[Y(x)].$$

这就说明极值曲线 $y=x$ 使泛函达到弱极小.

由上述定理 1 出发,立即可以得到另一个弱极小的必要条件,称之为第二必要条件,它由下面的定理来表述.

定理 2 如果 $y=Y(x)$ 使泛函(A)达到弱极小,则必有

$$F_{y'y'}(x,Y(x),Y'(x)) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

证明 在定理 1 所构造的属于强邻域的可取函数集合 $y(x,\alpha)=Y(x)+\eta(x,\alpha)$ 中,只要我们规定 $|u|$ 充分小时,这一函数集合便可以符合弱邻域可取函数类的要求. 但仍有

$$\Psi(u) = E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)+u) \geqslant 0,$$

另外,当 $u=0$ 时,由 $E(x,y,y',\xi)$ 的定义可知

$$\Psi(0) = E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)) = 0,$$

又从(2.2)可计算得

$$\Psi'(0) = F_{y'}(x,Y(x),Y'(x)) - F_{y'}(x,Y(x),Y'(x)) = 0,$$

将 $\Psi(u)$ 在 $u=0$ 的邻域作泰勒展开,于是有

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\Psi''(0)u^2 + o(u^2)①.$$

所以,必有 $\Psi''(0)\geqslant 0$. 由 $\Psi(u)$ 计算可得

$$\Psi''(0) = F_{y'y'}(x,Y(x),Y'(x)) \geqslant 0, \quad \forall x \in [x_0,x_1].$$

于是定理得证.

下面我们引入勒让德条件.

设泛函(A)的被积函数 $F(x,y,y')$,沿着一条曲线 $y=y(x)$,恒有 $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$),$\forall x\in[x_0,x_1]$,则称泛函(A)沿曲线 $y=y(x)$ 满足勒让德条件. 如果沿此曲线恒有 $F_{y'y'}>0$(或 <0),则称泛函(A)沿该曲线满足勒让德强条件.

上述定理 2 说明,若 $y=Y(x)$ 使泛函(A)取得极小值,则沿它满足勒让德条件 $F_{y'y'}\geqslant 0$.

值得指出的是:(1) 如果将定理 1 条件中的强极小换成强极大,则用同样的方法可以证明必有 $E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)+u)\leqslant 0$;(2) 如果将定理 2 条件中的弱极小换成弱极大,则也类似地可以证明沿着极值曲线必有 $F_{y'y'}\leqslant 0$ 成立;(3) 条件 $E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)+u)\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$),$\forall x\in[x_0,x_1]$,称为沿曲线 $y=Y(x)$ 有魏尔斯特拉斯条件成立,魏尔斯特拉斯条件和勒让德条件有着重要的联系,它们之间的联系可由关系式

---

① $o(u^2)$ 表示 u^2 的高阶无穷小.

$$E(x,y,y',\xi) = \frac{1}{2}F_{y'y'}(x,y,k)(\xi - y')^2 \text{①} \tag{2.5}$$

(其中 k 介于 y' 与 ξ 之间)来说明. 当 $F_{y'y'}$ 连续,且 $|y'-\xi|$ 充分小时,满足魏尔斯特拉斯条件和沿着曲线 $y=y(x)$ 满足勒让德条件是等价的.

我们把满足 $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\neq 0$ 的 $y(x)$ 上的弧段称为非奇异弧段,如果在 $y=y(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ 的全部曲线段上有 $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\neq 0$ 成立,则称 $y=y(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ 为非奇异曲线.

§6.3 雅可比条件与共轭点

在微积分中求函数 $y=f(x)$ 的极值点时,首先是由其一阶导数为零,即令 $f'(x)=0$,得到一系列的驻点值;当二阶导数存在时,再由二阶导数 $f''(x)$ 在驻点处的正负号,来确定该驻点是极大点,还是极小点;当二阶导数的值为零时,再用二阶以上的高阶导数来加以判别之. 当我们在研究泛函极值问题的充分性理论时,自然要牵涉对泛函高阶变分的研究. 本节,我们先从讨论泛函的二阶变分开始,然后,再引入一个对建立充分性理论不可缺少的第三个重要概念——雅可比条件,并证明一个使雅可比条件成立的充分条件——雅可比定理.

1. 二阶变分

设 $y=Y(x)$ 使泛函(A)达到极值,仍取 $\eta(x)\in D'[x_0,x_1]$, $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$,我们将 $Y(x)$ 的邻近曲线 $Y(x)+\alpha\eta(x)\in S$ 代入泛函(A),得到

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= J[Y(x)+\alpha\eta(x)]\\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(x,Y(x)+\alpha\eta(x),Y'(x)+\alpha\eta'(x))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因为 $y=Y(x)$ 使泛函(A)达到极值,故有

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1}[\overline{F}_y\eta(x)+\overline{F}_{y'}\eta'(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

如果 $y=Y(x)$ 使泛函(A)达到极小,则由微分学可知,必有

$$\Phi''(0)\geqslant 0 \quad (\text{若 } \Phi''(0) \text{ 存在})^{②}.$$

---

① 将 $E(x,y,y',\xi)$ 作为 ξ 的一元函数,并对它在 y' 处使用泰勒公式,注意到 $E(x,y,y',y')=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}E(x,y,y',\xi)\big|_{\xi=y'}=0$,以及 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}E(x,y,y',\xi)\big|_{\xi=k}=F_{y'y'}(x,y,k)$ 便得到(2.5).

② 因 $\Phi(\alpha)-\Phi(0)=\Phi'(0)\alpha+\Phi''(0)\frac{\alpha^2}{2}+o(\alpha^2)$ 成立,于是,当 $\alpha>0$ 充分小时,$\Phi(\alpha)-\Phi(0)$ 的符号与 $\Phi''(0)$ 的符号相同,但 $\Phi(\alpha)-\Phi(0)\geqslant 0$,故 $\Phi''(0)\geqslant 0$.

然而,经过直接计算,得到

$$\Phi''(0) = \int_{x_0}^{x_1}[\overline{F}_{yy}\eta^2(x) + 2\overline{F}_{yy'}\eta(x)\eta'(x) + \overline{F}_{y'y'}(\eta'(x))^2]\,\mathrm{d}x. \quad (3.1)$$

我们将$\frac{\alpha^2}{2}\Phi''(0)$称为泛函(A)的二阶变分,记为$\delta^2 J$,即

$$\frac{\alpha^2}{2}\Phi''(0) = \delta^2 J.$$

从上面的分析,我们可得到泛函取弱极小的另一必要条件,这就是

第三个必要条件　若$y = Y(x)$使泛函(A)取得弱极小,则其二阶变分为非负,即有

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(\overline{F}_{yy}\eta^2 + 2\overline{F}_{yy'}\eta\eta' + \overline{F}_{y'y'}\eta'^2)\,\mathrm{d}x \geqslant 0. \quad (3.2)$$

2. 雅可比条件与共轭点

为了研究时方便,首先引进几个简便的记号. 我们知道在(3.1)中的$\overline{F}_{yy}$,$\overline{F}_{yy'}$,$\overline{F}_{y'y'}$都是将极值曲线$y = Y(x)$代入后的已知函数,但是$\eta(x)$却是任意的(当然要满足逐段光滑和端点为零的要求),故把(3.1)右端的被积函数记为$2\omega(x,\eta,\eta')$,即

$$2\omega(x,\eta,\eta') = \overline{F}_{yy}\eta^2 + 2\overline{F}_{yy'}\eta\eta' + \overline{F}_{y'y'}\eta'^2,$$

这是$\eta(x)$和$\eta'(x)$的二次齐次式,对它的积分可表示为$\eta(x)$的泛函,故记(3.1)式为

$$K[\eta(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} 2\omega(x,\eta,\eta')\,\mathrm{d}x. \quad (3.3)$$

从上段的研究可知,若$y = Y(x)$使泛函(A)达到弱极小,则必有

$$K[\eta(\cdot)] \geqslant 0. \quad (3.4)$$

现在,我们来研究当$y = Y(x)$使泛函(A)取得弱极小时,泛函(3.3)的欧拉方程的解应具有什么样的性态的问题. 泛函(3.3)的欧拉方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega_{\eta'} - \omega_{\eta} = 0, \quad (3.5)$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\overline{F}_{y'y'}\eta' + \overline{F}_{yy'}\eta) - (\overline{F}_{yy'}\eta' + \overline{F}_{yy}\eta) = 0. \quad (3.6)$$

方程(3.5)或(3.6)称为泛函(A)相应于极值曲线$y = Y(x)$的雅可比方程.

定理 1(雅可比)　设泛函(A)的极值曲线$y = Y(x)$满足勒让德强条件

$\overline{F}_{y'y'}(x, Y(x), Y'(x)) > 0, \forall x \in [x_0, x_1]$，且它使泛函(A)达到弱极小，则泛函(A)相应于 $y = Y(x)$ 的雅可比方程(3.6)满足

$$\eta(x_0) = 0, \quad \eta'(x_0) = 1^{①} \tag{3.7}$$

的解，在 $[x_0, x_1]$ 的内部不存在零点.

证明 用反证法. 设结论非真，即存在一个点 c：$x_0 < c < x_1$，使雅可比方程(3.6)附加以条件(3.7)的解

$$\eta = \tilde{u}(x)$$

满足 $\tilde{u}(x_0) = \tilde{u}(c) = 0$，且在 $[x_0, c]$ 上不恒为零，我们来构造一个函数

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & x_0 \leqslant x \leqslant c, \\ 0, & c < x \leqslant x_1, \end{cases}$$

显然，满足 $\tilde{\eta}(x_0) = \tilde{\eta}(x_1) = 0, \tilde{\eta}(x) \in D'[x_0, x_1]$，因此它属于泛函(3.3)的可取函数类，将它代入泛函(3.3)得

$$K[\tilde{\eta}(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} 2\omega[x, \tilde{\eta}(x), \tilde{\eta}'(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{c} 2\omega[x, \tilde{\eta}(x), \tilde{\eta}'(x)]\mathrm{d}x.$$

由于 ω 是关于 $\tilde{\eta}$ 和 $\tilde{\eta}'$ 的二次齐次式，故由关于二次齐次式的欧拉定理有 $2\omega(x, \tilde{\eta}(x), \tilde{\eta}'(x)) = \tilde{\omega}_\eta \tilde{\eta}(x) + \tilde{\omega}_{\eta'}\tilde{\eta}'(x)$，代入上式，得

$$K[\tilde{\eta}(\cdot)] = \int_{x_0}^{c} [\tilde{\omega}_\eta \tilde{\eta}(x) + \tilde{\omega}_{\eta'} \tilde{\eta}'(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{c} \left(\tilde{\omega}_\eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\omega}_{\eta'}\right)\tilde{\eta}(x)\mathrm{d}x, \tag{3.8}$$

这里最后一步用了分部积分法，上式中 $\tilde{\omega}_\eta$ 及 $\tilde{\omega}_{\eta'}$ 分别表示 $\omega_\eta(x, \tilde{\eta}(x), \tilde{\eta}'(x))$ 和 $\omega_{\eta'}(x, \tilde{\eta}(x), \tilde{\eta}'(x))$，由于 $\tilde{\eta}(x)$ 应满足雅可比方程(3.5)，故上述积分(3.8)应该为零，即

---

① 这里假设 $\eta'(x_0) \neq 0$ 是首要的. 因为若 $\eta'(x_0) = 0$，则由 $\overline{F}_{y'y'} > 0$，可知(3.6)可化为二阶常微分方程 $\eta'' + p(x)\eta' + q(x)\eta = 0$ 的形式，而从微分方程的理论可知，此方程只有 $\eta(x) = 0$ 的唯一解. 其次，假定 $\eta'(x_0) = 1$ 是为了使(3.6)满足解的存在唯一性条件，作了 $\eta'(x_0) = 1$ 的假定的解与只作 $\eta'(x_0) \neq 0$ 假定的解只相差一个常数因子，这对定理的结论毫无影响.

$$K[\tilde{\eta}(\cdot)] = 0.$$

另一方面，从以上$\tilde{\eta}(x)$的构造和条件(3.7)来看，$\tilde{\eta}(x)$在$x=c$处存在一个角点. 这是因为在$x=c$处，必有$\tilde{u}'(c)\neq 0$，否则由微分方程的理论可得(3.5)只有恒为零的唯一解，但这和开始时为使(3.5)有非零解的假定(3.7)有矛盾. 因此，有$\tilde{\eta}'(c-0)=\tilde{u}'(c)\neq 0$，$\tilde{\eta}'(c+0)=0$，故$\tilde{\eta}(x)$在$x=c$处有角点. 然而由于在角点处，泛函$K[\tilde{\eta}(\cdot)]$不满足埃德曼条件

$$\omega_{\eta'}(x,\tilde{\eta},\tilde{\eta}')\Big|_{x=c-0}^{x=c+0} = 0.$$

这是因为

$$\omega_{\eta'}(x,\tilde{\eta},\tilde{\eta}')\Big|_{x=c-0}^{x=c+0} \equiv \left[\bar{F}_{yy'}\tilde{\eta} + \bar{F}_{y'y'}\tilde{\eta}'\right]_{x=c-0}^{x=c+0}$$

$$= -\bar{F}_{y'y'}(c,Y(c),Y'(c))\,\tilde{\eta}'(c-0)\neq 0.$$

这就说明在$\tilde{\eta}(x)$的角点上不满足取极值的必要条件. 故知$\eta=\tilde{\eta}(x)$不能使泛函$K[\eta(\cdot)]$取得极小值. 也就是说，必存在另外的$\eta^*(x)\in D'[x_0,x_1]$，$\eta^*(x_0)=\eta^*(x_1)=0$，使泛函$K[\eta^*(\cdot)]<0$，这就和弱极小的第三必要条件(3.2)或(3.4)相矛盾，这就证明了定理的结论.

推论　设$y=Y(x)$为泛函(A)的一条非奇异极值曲线，若相应于它的泛函(A)的雅可比方程(3.5)满足条件(3.7)的解，在$[x_0,x_1]$的内部有零点，则此极值曲线不能给泛函(A)以极小值.

这个推论可以作为判断某一极值曲线，能否使泛函(A)取得极小值的又一必要条件，称为第四必要条件.

相应于极值曲线的雅可比方程的解，(1) 如果在$x_0<x<x_1$上没有零点，则称此极值曲线在$[x_0,x_1]$内满足雅可比条件；(2) 如果在$x_0<x\leq x_1$上没有零点，则称此极值曲线在$[x_0,x_1]$内满足雅可比强条件.

从上述推论可知，为了确定由解欧拉方程所得到的极值曲线是否真使泛函(A)取得极值，必须首先考察它是否满足雅可比条件. 如果不满足雅可比条件，那就可以断定此极值曲线并非使泛函(A)取得极值. 自然，读者一定会提出这样一个问题：难道我们真的要从解雅可比方程本身去考察它的解在$[x_0,x_1]$内部有没有零点吗？如果果真如此的话，那就太麻烦了. 下面我们给出一个命题，指明雅可比方程的解与极值曲线族的联系，这就会使考察极值曲线是否在$[x_0,x_1]$上满足雅可比条件的工作大为简化.

定理 2 如果 $y=y(x,\mu)$ 是含单参数 μ 的一族极值曲线，而且当 $\mu=\mu_0$ 时，能由此极值曲线族得到极值曲线 $y=Y(x)$，即 $y(x,\mu_0)=Y(x)$；又设 $y(x,\mu)$ 与 $y'(x,\mu)$ 在 $\mu=\mu_0$ 的附近以及在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时是二阶连续可微的，那么 $u(x)=\frac{\partial}{\partial\mu}y(x,\mu)\big|_{\mu=\mu_0}$ 就是相应于 $y=Y(x)$ 的雅可比方程的解.

证明 由于 $y=y(x,\mu)$ 是极值曲线族，故它满足泛函(A)的欧拉方程，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y(x,\mu),y'(x,\mu))-F_y(x,y(x,\mu),y'(x,\mu))=0.$$

将上式对 μ 求导，由 $y(x,\mu)$，$y'(x,\mu)$ 二阶连续可微以及对 F 的二阶连续可微的假定，知道对 x 和对 μ 的求导顺序可以交换，交换求导顺序后，令 $\mu=\mu_0$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\overline{F}_{y'y'}u'(x)+\overline{F}_{y'y}u(x)]-[\overline{F}_{yy'}u'(x)+\overline{F}_{yy}u(x)]=0.$$

将上式与(3.6)比较，可知 $u(x)$ 满足雅可比方程，证毕.

上述定理 2 指出，只要求出一个包含极值曲线在内的含有单参数的极值曲线族，然后对此极值曲线族的参数求导，再将对应于极值曲线的参数值代入该导数，便得到了雅可比方程的解，完全不必去解雅可比方程. 我们知道，在解泛函(A)的欧拉方程时，往往得到含有两个参数的极值曲线族，若让它通过左端(x_0,y_0)，就能得到一个含有单参数的极值曲线族 $y=y(x,\mu)$，它是以左端点为束心的极值曲线束(见图 6.3.1).

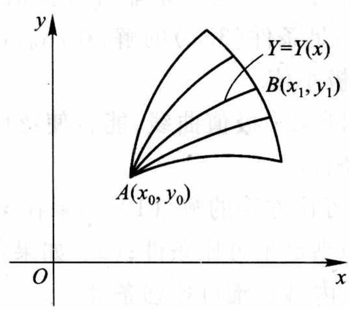


图 6.3.1

另外，我们假定 μ 是极值曲线族在(x_0,y_0)处的斜率，故有

$$y(x_0,\mu)=y_0,\quad y'(x_0,\mu)=\mu.$$

用以上步骤所确定的极值曲线族，既满足定理 2 的要求，又满足条件

$$u(x_0)=\frac{\partial}{\partial\mu}y(x_0,\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=\frac{\partial y_0}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=\mu_0}=0,$$

$$u'(x_0) = \frac{\partial}{\partial \mu} y'(x_0,\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0} = \frac{\partial}{\partial \mu}\mu\bigg|_{\mu=\mu_0} = 1.$$

根据推论，要考察 $y = Y(x)$ 是否满足雅可比条件，剩下的就转化为 $u(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} y(x,\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0} = 0$ 的所有根是否在 $[x_0,x_1]$ 上的问题了.

下面，我们来说明一下雅可比条件的几何意义. 为此我们引入共轭点的概念.

设 $\eta = u(x)$ 为泛函(A)相应于非奇异极值曲线 $y = Y(x)$ 的雅可比方程(3.6)且满足条件(3.7)的一个解，若有一个点 $\tilde{x} > x_0$ 满足(1) $u(\tilde{x}) = 0$；(2) 对于 $\forall x \in (x_0,\tilde{x})$，有 $u(x) \neq 0$，则称极值曲线上的点 $(\tilde{x},Y(\tilde{x}))$ 为 $(x_0,Y(x_0))$ 的共轭点，简称 $\tilde{x}$ 为 x_0 的共轭点.

根据共轭点的概念，定理1的内容，还可以用下面的两种方式来叙述.

(1) 若非奇异极值曲线 $y = Y(x)$ 使泛函(A)达到弱极小，则它在 $x_0 < x < x_1$ 上满足雅可比条件；

(2) 若非奇异极值曲线 $y = Y(x)$ 使泛函(A)达到弱极小，则在 $[x_0,x_1]$ 的内部没有 x_0 的共轭点.

从共轭点的定义可知点 $(x_0,Y(x_0))$ 的共轭点 $(\tilde{x},Y(\tilde{x}))$ 满足

$$\begin{cases} u(\tilde{x}) = \frac{\partial}{\partial \mu} y(\tilde{x},\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0} = 0, \\ Y(\tilde{x}) = \tilde{y} = y(\tilde{x},\mu_0), \end{cases}$$

即 (x_0,y_0) 的共轭点 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 由方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu}[y - y(x,\mu)]\bigg|_{\mu=\mu_0} = 0, \\ y - y(x,\mu_0) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

来确定. 我们知道，极值曲线族 $y - y(x,\mu) = 0$ 的包络线方程可由方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu}[y - y(x,\mu)] = 0, \\ y - y(x,\mu) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

消去参数 μ 而得到. 因此，由(3.9)所得的共轭点必在包络线(3.10)上. 另外，它又在极值曲线 $y = Y(x)$ 上，这样，我们所得到的 $(x_0,Y(x_0))$ 的共轭点乃是极值曲线族的包络线与极值曲线 $y = Y(x)$ 的切点. 由定理1可知若非奇异曲线 $y =$

$Y(x)$使泛函(A)达到弱极小,则它与极值曲线族的切点必不在$[x_0,x_1]$之间的曲线 $y=Y(x)$ 弧段上.

例 1 考察通过 $A(0,0)$ 和 $B(a,0)$ 两点的泛函

$$J[y(\cdot)]=\int_0^a(y'^2-y^2)\,dx \quad (a>0)$$

的极值曲线是否满足雅可比条件.

解 泛函的欧拉方程为

$$y''+y=0,$$

其通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x,$$

过(0,0)点的极值曲线族为 $y=c_1\sin x$,应用定理 2,可得

$$u(x)=\frac{\partial}{\partial c_1}(c_1\sin x)=\sin x$$

为泛函的雅可比方程的解. 由于 $\sin x=0$ 的解 $x=K\pi(K=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $x_0=0$ 点的共轭点,故当 $a<\pi$时,这些共轭点都位于$[0,a]$之外,因而雅可比强条件恒成立;如果 $a=\pi$,则在线段 $0\leqslant x\leqslant a$ 上,$\eta=\sin x$ 至少在 $x=\pi$处为零,于是,雅可比强条件不成立,但雅可比条件成立;当 $a>\pi$时,雅可比条件不必成立.

例 2 考察泛函

$$J[y(\cdot)]=\int_0^a(y'^2+y^2+x^2)\,dx$$

通过 $A(0,0)$ 和 $B(a,0)$ 的极值曲线是否满足雅可比条件.

解 此泛函的欧拉方程为

$$y''-y=0,$$

其通解为

$$y=c_1\operatorname{sh}x+c_2\operatorname{ch}x,$$

由条件 $y(0)=0$,可以求出 $c_2=0$,故得极值曲线族为

$$y=c_1\operatorname{sh}x,$$

由定理 2 知道 $u(x)=\dfrac{\partial}{\partial c_1}(c_1\operatorname{sh}x)=\operatorname{sh}x$ 是泛函的雅可比方程的解. 而 $\operatorname{sh}x=0$,只有一个解 $x=0$,在其他地方,$\operatorname{sh}x\neq0$,故对于任何 a,雅可比条件恒成立.

§6.4 极值曲线场与极值曲线的嵌入概念

我们仅仅知道寻求极值曲线族和极值曲线,这是不够的,充分性的研究还要

求对此极值曲线族本身提出较高的几何要求,那就是要求它能够形成一个场. 另外,对这个极值曲线 $y=Y(x)$,也不能只是满足上节定理 2 中的那点要求,即当 $\mu=\mu_0$时,此极值曲线族对应于这个指定的极值曲线,而是还要对它在极值曲线场中的地位给出一定的限制,这就是要求它能被嵌入极值曲线场. 因此下面首先阐述一下曲线场的概念.

1. 极值曲线场

若对在 xOy 平面上的一个单连通区域 D 中的每一点(x,y),有且仅有极值曲线族 $y=y(x,\mu)$中的一条通过,而且过 D 中任一点(x,y)的极值曲线的切线斜率 $p(x,y)$在 D 内连续可微,则我们称该极值曲线族在区域 D 中形成了一个极值曲线场,简称为极值曲线场 D.

如果要求出极值曲线族 $y=y(x,\mu)$过点(x_0,y_0)的一条极值曲线,那么只要由 $y_0=y(x_0,\mu)$定出 $\mu=\mu(x_0,y_0)$,然后再代入族中去,就可得出该极值曲线为 $y=y(x,\mu(x_0,y_0))$.

例 1 在圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内的平行直线 $y=x+c$ 形成一个场(图 6.4.1),该场的斜率函数为 $p(x,y)=1$.

例 2 抛物线族 $y=(x-c)^2-1$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内并不形成一个场,因为过圆内任一点都有两条抛物线通过(图 6.4.2).

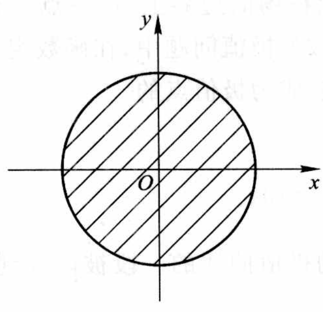


图 6.4.1

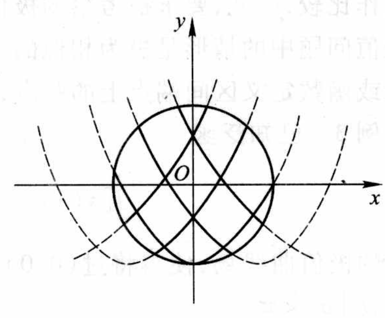


图 6.4.2

如果极值曲线族是由通过某一点(这点称为束心)的一束曲线所构成,而且该族在除了束心以外的某个区域 D 中(束心可以在 D 中)形成一个场,那么,我们也称该极值曲线族在 D 中构成了一个极值曲线场.

2. 极值曲线的嵌入概念

如果一条指定的通过(x_0,y_0)和(x_1,y_1)的极值曲线 $y=Y(x)$满足下面两个条件:

(1) 它正好是由在区域 D 中构成极值曲线场的族 $y=y(x,\mu)$通过取 $\mu=\mu_0$ 而得到的;

(2) 它又不在 D 的边界上(图 6.4.3),那么,我们就称极值曲线 $y=Y(x)$被

嵌入到极值曲线场之内，或者说极值曲线场包含了该极值曲线.

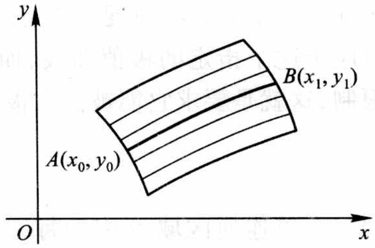


图 6.4.3

如果极值曲线 $y=y(x,\mu)$ 是通过点 $A(x_0,y_0)$ 的曲线束，它在极值曲线 $y=Y(x)$（也通过束心）的邻域中，构成极值曲线场，则可把上述定义中的条件(2)改写为"除了点 $A(x_0,y_0)$ 外，$y=Y(x)$ 不在 D 的边界上"，而条件(1)不变，这时也可以说极值曲线 $y=Y(x)$ 被嵌入到极值曲线场之内（图 6.3.1）.

我们来说明一下"嵌入"概念中的条件(2)的必要性. 因为从解欧拉方程得到的极值曲线 $y=Y(x)$，如果是位于极值曲线场 D 的边界上，那么就不能形成包括它在内，且它的两边都有场中的曲线的强邻域或弱邻域. 而判断它是否真使泛函(A)取得极小值时，又一定要和其两侧的邻近曲线比较，不能只和一侧的邻近曲线作比较，因此，要求被考察的极值曲线不能在场的边界上. 这一点和普通函数极值问题中的情形是极为相似的. 在普通函数的极值问题中，在函数定义域边界上或函数定义区间端点上的驻点，是不一定能成为极值点的.

例 3 已知泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx,$$

求它的极值曲线场，使得将过(0,0)和$(a,0)$的极值曲线的一段被嵌入到其中，这里设 $|a|<\pi$.

解 这个泛函的欧拉方程为

$$y'' + y = 0,$$

其通过(0,0)的极值曲线族为

$$y = c_1 \sin x,$$

又由通过$(a,0)$得 $c_1=0$，所以 $y=0$ 为指定的过 $A(0,0)$ 和 $B(a,0)$ 的极值曲线.

显然，在通过(0,0)的极值曲线束 $y=c_1\sin x$ 中，令 $c_1=0$，便可得到 $y=0$；而且极值曲线族 $y=c_1\sin x$ 在 xOy 平面上的区域 D: $0\leqslant x\leqslant a$ 构成了一个极值曲线场；还有，$y=0$ 除了束心(0,0)外，并不在区域 D 的边界上. 所以，过 $A(0,0)$，$B(a,0)$ 的极值曲线 $y=0$，能被嵌入到极值曲线族 $y=c_1\sin x$ 在区域 D: $0\leqslant x\leqslant$

$a(\,|a|<\pi)$上所构成的极值曲线场中(图 6.4.4).

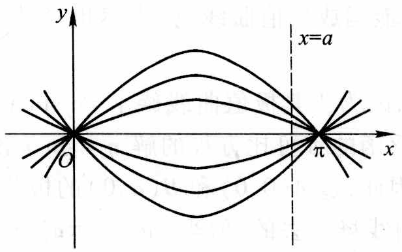


图 6.4.4

下面我们讨论:一个极值曲线在什么条件下,才能被嵌入到一个极值曲线场中去呢?如果能建立一个充分条件,来判断一条指定的曲线是否能被嵌入某个极值曲线场,而不要具体去作出这个极值曲线场,那将是一个大好事. 现在,我们来叙述一个嵌入的充分条件.

定理 1 对于通过 $A(x_0,y_0)$和 $B(x_1,y_1)$两点的极值曲线 $y=Y(x)$ 的弧段 AB,只要点 A 的共轭点 A^* 不位于 AB 弧段上,也就是,只要 $y=Y(x)$满足雅可比强条件,则它就必定会被嵌入到一个极值曲线场中去.

我们从几何上来说明一下这个结论的正确性. 我们知道,点 $A(x_0,y_0)$的共轭点就是过 A 点的极值曲线族 $y=y(x,\mu)$的包络线与 $y=Y(x)$的交点,而和 $y=Y(x)$非常接近的族中曲线与 $y=Y(x)$如果相交,则这个交点一定在包络线的附近(图 6.4.5). 因此如果过 A,B 两点的极值曲线 $y=Y(x)$的弧 AB 与过 A 点的极值曲线束 $y=y(x,\mu)$(此束中也包含有 $y=Y(x)$本身)的包络线没有公共点(A 点可以除外)或者说公共点 A^* 在 AB 弧的右边,则束中与极值曲线 $y=Y(x)$充分接近的诸曲线绝不可能相交在 AB 弧的附近(A 点除外). 也就是说,存在一个 AB 弧的邻近区域,其中除了 A 点之外,所有的束中的曲线都不相交,这就形成了能将 $y=Y(x)$嵌入于其中的极值曲线场(图 6.4.5).

如果 A 点的共轭点 A^* 位于 AB 弧段上(如图 6.4.6),则与极值曲线 $y=Y(x)$

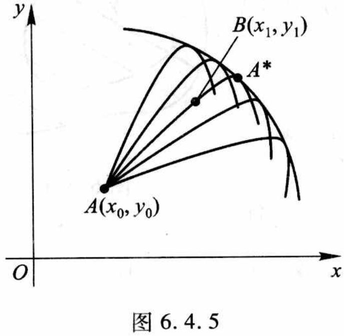


图 6.4.5

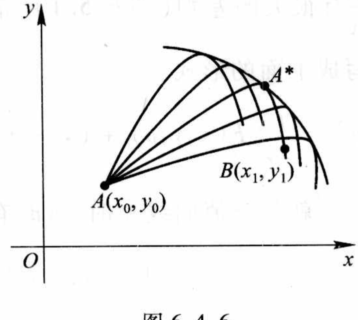


图 6.4.6

非常接近的束中的曲线，就和 $y=Y(x)$ 相交于 A^* 的附近. 因此，含有 AB 弧段的这一个极值曲线束就不能构成极值曲线场，当然也就谈不上 $y=Y(x)$ 被嵌入极值曲线场的问题了.

例如上节中的例 1，因为当其极值曲线族 $y=c_1\sin x$ 在 $0<x\leqslant a(a<\pi)$ 时，能形成极值曲线场，且泛函的雅可比方程的解 $\eta=\sin x$ 没有共轭点在 $[0,a]$ 上，故它满足雅可比条件，因此，过 $A(0,0)$ 和 $B(a,0)$ 的极值曲线 $y=0$ 在 $0<a<\pi$ 时，是能被嵌入到极值曲线场中去的. 但当 $|a|>\pi$ 时，$y=c_1\sin x$ 在 $0<x\leqslant a$ 中不能构成曲线场，所以 $y=0$ 就谈不上能被嵌入极值曲线场中去的问题了.

§6.5 希尔伯特积分及充分性定理

为了比较泛函沿极值线 γ: $y=Y(x)\in S$ 的值和沿任意曲线 $\tilde{\gamma}$: $y=y(x)\in S\cap N[Y(x)]$ 的值的大小，即

$$J[y(x)]-J[Y(x)]=\int_{\tilde{\gamma}}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x-\int_{\gamma}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

的正负，我们再引入一个对建立充分性理论很有用的第四重要概念——希尔伯特积分.

在极值曲线场 D 内，我们把线积分

$$H[\tilde{\gamma}]=\int_{\tilde{\gamma}}[F(x,y,p(x,y))-p(x,y)F_{y'}(x,y,p(x,y))]\,\mathrm{d}x+F_{y'}(x,y,p(x,y))\,\mathrm{d}y \tag{5.1}$$

称为泛函(A)的希尔伯特积分，其中 $p(x,y)$ 为 $\tilde{\gamma}$ 上点 (x,y) 处极值曲线场的斜率函数.

注意上述积分中的场斜率 $p(x,y)$ 与 $\tilde{\gamma}$ 的切线斜率 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 有很大的差别(图 6.5.1). 希尔伯特积分(5.1)可以写成下面的形式

$$H[\tilde{\gamma}]=\int_{\tilde{\gamma}}[F(x,y,p)+(y'-p)F_{y'}(x,y,p)]\,\mathrm{d}x.$$

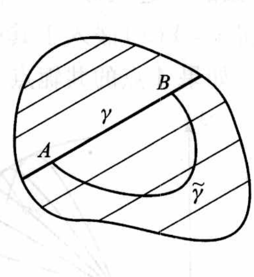


图 6.5.1

显然，当 $\tilde{\gamma}$ 就是极值曲线 γ 时，这时有 $y'=p(x,y)$，故有

$$H[\gamma]=\int_{\gamma}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F(x,Y(x),Y'(x))\,\mathrm{d}x,$$

即有

$$H[\gamma] = J[Y(x)]. \tag{5.2}$$

定理 1(希尔伯特)　在平面上的极值曲线场单连通区域 D 内,希尔伯特积分(5.1)与积分路径无关.

证明　令 $N(x,y) = F_{y'}(x,y,p(x,y))$,

$$M(x,y) = F(x,y,p(x,y)) - p(x,y)F_{y'}(x,y,p(x,y)),$$

于是有

$$H[\tilde{\gamma}] = \int_{\tilde{\gamma}} M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

我们的目的是要证明在场内的任一点上均有

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0. \tag{5.3}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} = {} & F_y(x,y,p(x,y)) + F_{y'}(x,y,p(x,y))\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} - \\ & F_{y'}(x,y,p(x,y))\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} - \\ & F_{y'y}(x,y,p(x,y))p(x,y) - \\ & F_{y'y'}(x,y,p(x,y))p(x,y)\frac{\partial p(x,y)}{\partial y},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = F_{y'x}(x,y,p(x,y)) + F_{y'y'}(x,y,p(x,y))\frac{\partial p(x,y)}{\partial x},$$

所以有

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = F_y - F_{y'x} - F_{y'y}p(x,y) - F_{y'y'}[p_x(x,y) + p_y(x,y)p(x,y)]. \tag{5.4}$$

注意最后一项方括号中的量 $p_x(x,y) + p_y(x,y)p(x,y)$ 乃是斜率函数 $p(x,y)$ 对 x 的全导数,即 $p_x(x,y) + p_y(x,y)p(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,y)$. 因此(5.4)即为

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = F_y(x,y,p(x,y)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y,p(x,y)),$$

但因为 D 是极值曲线场,所以 $p(x,y)$ 是欧拉方程的积分曲线的斜率函数,因此,对于 D 内任意一点 (x,y) 来说,$x,y,p(x,y)$ 应恒满足欧拉方程

$$F_y(x,y,p(x,y)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y,p(x,y)) = 0,$$

故得到了$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$. 然而线积分与路线无关的充要条件为(5.3),因此定理得证.

有了魏尔斯特拉斯函数、雅可比条件、勒让德条件、极值曲线嵌入、希尔伯特积分等概念以及相应的理论之后,我们便可以建立充分性的理论了.

定理 2(强极小的充分条件) 当一条曲线 γ: $y = Y(x) \in S$ 满足:

(1) 它是一条极值曲线;

(2) 它能被嵌入在一个极值曲线场中(这一条件可换为"它满足雅可比条件");

(3) 存在一个 γ 的邻域 N,使得在该邻域内的任何点 (x,y),有下述的魏尔斯特拉斯条件

$$E(x,y,p(x,y),q) \geqslant 0, (x,y) \in N, q \in (-\infty, \infty), q \neq p(x,y)$$

成立,则 γ 使泛函(A)达到强极小,其中 $E(x,y,p(x,y),q)$ 为泛函(5.1)的被积函数 $F(x,y,p(x,y))$ 的魏尔斯特拉斯函数,即

$$E(x,y,p,q) = F(x,y,q) - F(x,y,p) - (q-p)F_{y'}(x,y,p).$$

证明 不妨设 N 就是要嵌入 γ 的极值曲线场. 在 N 内任取一条异于 γ 的曲线 $\tilde{\gamma}$: $y = y(x) \in D'[x_0, x_1]$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. 注意这里对 $|y'(x) - Y'(x)|$ 的值未加限制,只对 $|y(x) - Y(x)|$ 的值作了限制,对极值曲线场 N 应用希尔伯特定理. 因沿 $\tilde{\gamma}$ 的希尔伯特积分与路线无关,故有

$$H[\tilde{\gamma}] = H[\gamma].$$

注意到(5.2)则有

$$\begin{aligned}
J[\tilde{\gamma}] - J[\gamma] &= J[\tilde{\gamma}] - H[\gamma] = J[\tilde{\gamma}] - H[\tilde{\gamma}] \\
&= \int_{\tilde{\gamma}} F(x,y,y')\mathrm{d}x - \int_{\tilde{\gamma}} [F(x,y,p(x,y)) + \\
&\quad (y' - p(x,y))F_{y'}(x,y,p(x,y))]\mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{\gamma}} [F(x,y,y') - F(x,y,p(x,y)) - \\
&\quad (y' - p(x,y))F_{y'}(x,y,p(x,y))]\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^{x_1} E[x, y(x), p(x,y(x)), y'(x)]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由定理中的条件(3),可知上式为非负,即

$$J[\tilde{\gamma}]-J[\gamma]\geqslant 0.$$

此式中的等式只有在 $y'(x)=p(x,y(x))$ 时才成立,但这个事实只有在 $\tilde{\gamma}\equiv\gamma$ 时才能实现,可是 $\tilde{\gamma}\neq\gamma$,故有

$$J[\tilde{\gamma}]>J[\gamma],$$

于是定理得证.

定理 3(弱极小的充分条件) 如果一条曲线 γ: $y=Y(x)\in S$ 满足:

(1) 它是一条极值曲线;

(2) 它能被嵌入在一个极值曲线场中(这一条件可由"它满足雅可比条件"代替);

(3) 这条极值曲线 γ 满足勒让德强条件,即

$$F_{y'y'}(x,Y(x),Y'(x))>0,\quad \forall x\in[x_0,x_1],$$

则 γ 使泛函(A)达到弱极小.

证明 由于假定 $F_{y'y'}(x,y,y')$ 对三个变元在 $\Omega\times\mathbf{R}$ 上连续,又 $(x,Y(x))\in\Omega$, $Y'(x)\in\mathbf{R}$,且因为 $F_{y'y'}(x,Y(x),Y'(x))>0(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$,点集合 $(x,Y(x),Y'(x))$, $\forall x\in[x_0,x_1]$ 在 $Oxyy'$ 空间为有界闭集,故由连续函数的性质知道,必存在正数 $\delta>0$ 和 $h>0$,使得当

$$|y-Y(x)|<\delta,\quad |y'-Y'(x)|<\delta$$

时,有

$$F_{y'y'}(x,y,y')\geqslant h>0.$$

在 $y=Y(x)$ 的邻域中任取一条异于 γ 的曲线 $\tilde{\gamma}$: $y=y(x)\in S$,并使适合条件

$$|y(x)-Y(x)|<\delta_1<\delta,\quad |y'(x)-Y'(x)|<\delta_1<\delta,\tag{5.5}$$

与定理 2 相同,可得

$$J[\tilde{\gamma}]-J[\gamma]=\int_{x_0}^{x_1}E[x,y(x),p(x,y(x)),y'(x)]\,\mathrm{d}x.\tag{5.6}$$

我们将 $E(x,y,p(x,y),y')$ 对第四变元 y' 在 $y'=p(x,y)$ 处使用泰勒公式,可得(见 §6.2 中的脚注)

$$E(x,y,p(x,y),y')=\frac{1}{2}[y'-p(x,y)]^2F_{y'y'}(x,y,k),\tag{5.7}$$

其中 k 介于 y' 与 $p(x,y)$ 之间. 由(5.5)可知当 $\delta_1>0$ 充分小时,可以保证 y' 与 $p(x,y)$(因而 k)均与 $Y'(x)$ 充分接近,于是有

$$F_{y'y'}(x,y,k) \geqslant h > 0,$$

由(5.7)知

$$E(x,y,p(x,y),y') \geqslant 0.$$

故从(5.6)得到

$$J[\tilde{\gamma}] - J[\gamma] = \int_{x_0}^{x} E[(x,y(x),p(x,y(x)),y'(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

上式的右端，只有当 $y'=p(x,y)$ 处处成立时，才可能成为等号，这种情形只能在 $\tilde{\gamma}\equiv\gamma$ 时才有可能发生. 但是，因 $\tilde{\gamma}\neq\gamma$，故有 $J[\tilde{\gamma}]>J[\gamma]$. 定理证毕.

注 1 上述定理 2、定理 3 中的条件(2)，可以用“雅可比条件”所代替，因为 §6.4 中的嵌入定理指出只要满足雅可比条件就能保证满足条件(2).

注 2 定理 3 的条件(3)，亦可用“魏尔斯特拉斯条件，即对于 $\forall y(x)\in N_{弱}[Y(x)]$ 恒有 $E(x,Y(x),Y'(x),y')\geqslant 0$(或对于充分小的 u，恒有 $E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)+u)\geqslant 0$)成立”来代替. 因为在(5.7)中，说明了函数 E 和 $F_{y'y'}$ 之间的联系. 当然定理 2 中的条件(3)亦可用“对于 $\forall y(x)\in N_{强}[Y(x)]$，恒有 $F_{y'y'}(x,y,y')>0$ 成立”来代替. 在今后的例题中，我们根据需要来随意择用满足“勒让德条件”或“魏尔斯特拉斯条件”来研究泛函在极值曲线上取得极值的情形.

注 3 我们仅将上述定理 2 和定理 3 的条件中的“$\geqslant 0$”或“>0”换成“$\leqslant 0$”或“<0”，便可得出判别极大值的充分条件，证明的思想方法完全类似于定理 2 和定理 3(或用 $-J$ 代 J，并应用定理 2 和定理 3)，建议读者将它们作为练习，自已完成之.

例 1 研究泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^a y'^3 \mathrm{d}x$$

在满足 $y(0)=0, y(a)=b, a>0, b>0$ 的极值曲线上，是否达到了极值.

解 满足非奇异条件的欧拉方程的通解为

$$y = c_1 x + c_2,$$

通过(0,0)点的极值曲线束为 $y=c_1x$，它可以构成一个极值曲线场. 而通过(0,0)和(a,b)的极值曲线为 $y=\dfrac{b}{a}x$，显然，这条极值曲线被嵌入到上述的极值曲线场内. 而泛函被积函数的魏尔斯特拉斯函数为

$$E(x,y,p,y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y'-p) = (y'-p)^2(y'+2p),$$

由于在极值曲线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，场的斜率 $p=\dfrac{b}{a}>0$，所以如果 y' 取接近于 $p=\dfrac{b}{a}$ 的

值，于是在 $y=\frac{b}{a}x$ 的邻域中有 $E\geqslant 0$，这样 $y=\frac{b}{a}x$ 满足定理 3 中的前面两个条件，再由定理 3 后的注 2 可知，极值曲线 $y=\frac{b}{a}x$ 满足取弱极小的所有条件. 故知，泛函在 $y=\frac{b}{a}x$ 上达到弱极小值. 当 $y'+2p<0$ 时，即 $y(x)$ 的斜率 $y'(x)$ 取不比 $-2p$ 大时，则有 $E<0$. 这就是说当不限制 y' 的范围时，E 无定号，于是取得强极值的必要条件(§6.2 的定理 1)不能被满足. 故此时在曲线 $y=\frac{b}{a}x$ 上不能使泛函取得强极值. 因此本例的泛函在 $y=\frac{b}{a}x$ 上不能达到强极小.

如果本例不用魏尔斯特拉斯条件，而用勒让德强条件来判别也是可以的. 因 $F_{y'y'}=6y'$，故在 $\frac{b}{a}>0$ 时 $F_{y'y'}=6\frac{b}{a}>0$，故由定理 3 可知 $y=\frac{b}{a}x$ 使泛函取弱极小值. 但对于任意的 y'，$F_{y'y'}$ 无常号，故在 $y=\frac{b}{a}x$ 上，泛函不取得强极值.

例 2 研究泛函

$$J[y(\cdot)]=\int_0^a(6y'^2-y'^4-yy')\,\mathrm{d}x$$

在满足 $y(0)=0$，$y(a)=b$，$a>0$，$b>0$ 的极值曲线上，是否达到了极值.

解 欧拉方程的解为 $y=c_1x+c_2$，过 $(0,0)$ 点和 (a,b) 点的极值曲线为 $y=\frac{b}{a}x$. 过 $(0,0)$ 点的极值曲线束为 $y=cx$，显然 $y=\frac{b}{a}x$ 被包括在此极值曲线束之中，且 $y=cx$ 形成了一个极值曲线的曲线场. 魏尔斯特拉斯函数为

$$\begin{aligned}E(x,y,p,y')&=6y'^2-y'^4+yy'-6p^2+p^4-yp-\\&\quad(y'-p)(12p-4p^3+y)\\&=-(y'-p)^2[y'^2+2py'-(6-3p^2)].\end{aligned}$$

显然 E 的符号由上式的后一个因式

$$y'^2+2py'-(6-3p^2)$$

来决定. 此因式当 $y'=-p\pm\sqrt{6-2p^2}$ 时为零；当 $6-2p^2\leqslant 0$，即 $p\geqslant\sqrt{3}$ 时，对于任意的 y'，$y'^2+2py'-(6-3p^2)\geqslant 0$；当 $6-2p^2>0$，即 $p<\sqrt{3}$ 时，表达式 $y'^2+2py'-(6-3p^2)$ 就失去定号. 但是如果限制 y'，使 y' 与 p 相差很小，也就是当 $y(x)\in N_{弱}\left[\frac{b}{a}x\right]$ 时，有

$$y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2) \approx 6p^2 - 6, \tag{5.8}$$

因而当 $p > 1$ 时,(5.8)式有正号,当 $p < 1$ 时,(5.8)式有负号.

由以上讨论可得,当 $p = \dfrac{b}{a} < 1$,即 $b < a$ 时,泛函在 $y = \dfrac{b}{a}x$ 上取弱极小值;当 $p = \dfrac{b}{a} > 1$,即 $b > a$ 时,泛函在 $y = \dfrac{b}{a}x$ 上取得弱极大值;在 $p = \dfrac{b}{a} \geqslant \sqrt{3}$时,泛函在 $y = \dfrac{b}{a}x$ 上取得强极大值;在 $p = \dfrac{b}{a} < \sqrt{3}$时,根据 §6.2 定理 1,可知泛函在 $y = \dfrac{b}{a}x$ 上既不能取得强极大值,也不能取得强极小值. 本例讨论的结果可由图 6.5.2 表示出来.

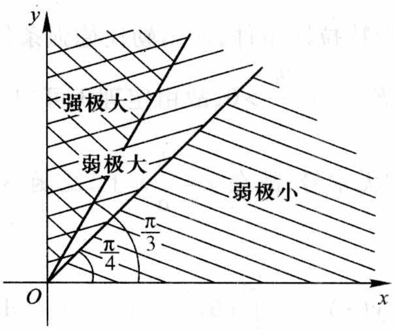


图 6.5.2

例 3 讨论泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,\mathrm{d}x$$

在满足 $y(0) = 0, y(a) = 0, a > 0$ 的极值曲线上,是否取得了极值. 是取得强极值? 还是弱极值? 是极大值? 还是极小值?

解 由前几节的讨论可知,通过点(0,0)的极值曲线束为 $y = c\sin x$,当 $a \neq K\pi$ 时,过点(0,0)和点$(a,0)$的极值曲线为 $y = 0$,当 $a < \pi$时,雅可比条件满足,当 $a > \pi$时,雅可比条件不满足. 又对于任意的 y'都有 $F_{y'y'} = 2 > 0$,故当 $a < \pi$时,$y = 0$使泛函取得强极小值.

现将本章所得的判别法则小结一下:设从解欧拉方程得到的过 $A(x_0, y_0)$和 $B(x_1, y_1)$两点的极值曲线为 $\boldsymbol{\gamma}$: $y = Y(x)$.

(1) 若沿着 $\boldsymbol{\gamma}$ 勒让德条件不满足,即 $F_{y'y'}(x, Y(x), Y'(x))$无定号(时正、时负),则它不能使泛函(A)取得弱极值(§6.2 定理 2).

(2) 对相应于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的 AB 弧来说,若 A 点的共轭点在 $x_0 < x < x_1$ 之内,即雅可比条件不满足,则 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能使泛函(A)取得弱极值(§6.3 定理 1 推论,验证方法

见定理 2).

(3) 若泛函(A)的被积函数的魏尔斯特拉斯函数

$$E(x, Y(x), Y'(x), Y'(x) + u), u \in \mathbf{R}, \forall x \in [x_0, x_1]$$

时正时负,即无定号,则 γ 不能使泛函(A)取得强极值(§6.2 定理 1).

(4) 若

(i) 对相应于 γ 的 AB 弧,雅可比条件满足;

(ii) 沿着 γ 勒让德强条件成立,即恒有

$$F_{y'y'}(x, Y(x), Y'(x)) > 0 \quad (< 0),$$

则 γ 使泛函(A)取得弱极小(大)值(本节定理 3).

(5) 若

(i) 对应于 γ 的 AB 弧,雅可比条件满足;

(ii) 泛函被积函数的魏尔斯特拉斯函数

$$E(x, y, p(x,y), y') \geqslant 0 (\leqslant 0), \quad (x,y) \in N,$$

则 γ 使泛函(A)取得强极小(强极大)(本节定理 2).

现在再举两个例题.

例 4 研究泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^x \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx$$

在满足 $y(0)=0, y(x_1)=y_1$ 的极值曲线上是否取得极值.

解 这个问题是第二章早已知道了的最速降线问题,其欧拉方程的通解为

$$\begin{cases} x = c_1(t - \sin t) + c_2, \\ y = c_1(1 - \cos t), \end{cases}$$

通过(0,0)点的极值曲线束是摆线束

$$x = c_1(t - \sin t), \quad y = c_1(1 - \cos t), \tag{5.9}$$

而且通过(0,0)点的极值曲线为

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \tag{5.10}$$

其中常数 a 由摆线束(5.9)通过 (x_1, y_1) 来确定.

当 $0 < x_1 < 2\pi a$ 时,(5.10)能被嵌入以摆线束(5.9)形成的极值曲线场中(图 6.5.3),对于任意的 y' 都有

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}, \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}[1+(y')^2]^{3/2}} \geqslant 0,$$

因此当 $0 < x_1 < 2\pi a$ 时，摆线(5.10)使泛函达到了强极小.

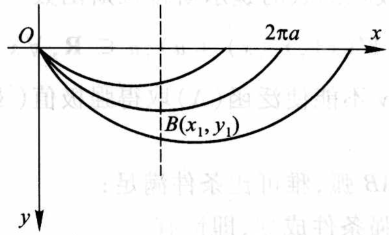


图 6.5.3

例 5 研究泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^a \frac{y}{(y')^2}\mathrm{d}x$$

在通过点(0,1)和点(a,b) $(a>0, 0<b<1)$的极值曲线上，是否达到了极值.

解 泛函的欧拉方程具有首次积分

$$\frac{y}{(y')^2} + y'\frac{2y}{(y')^3} = c, \quad \text{或} (y')^2 = 4c_1 y,$$

开方后求积分，就得到一族抛物线

$$y = (c_1 x + c_2)^2,$$

通过(0,1)点的极值曲线束为

$$y = (c_1 x + 1)^2, \tag{5.11}$$

它的包络线为 $y=0$(图 6.5.4)，(5.11)中有两条抛物线通过 $B(a,b)$ 点，在其中的一条抛物线 L_1 的弧段 AB 上，有一个与 A 点共轭的点 A^*，而在另一条 L_2 的弧段 AB 上，没有 A 点的共轭点，L_2 上与 A 共轭的点 A_1 在 AB 弧的外面. 于是，在 L_2 的弧段 AB 上，雅可比条件成立. 这样，L_2 就有可能使得泛函取得极值. 剩下来的

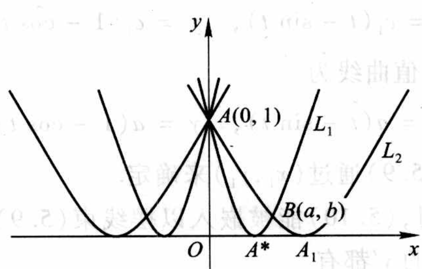


图 6.5.4

事，就是看它是否满足魏尔斯特拉斯条件或是勒让德强条件. 因为 $F_{y'y'}=\dfrac{6y}{(y')^4}$，故知在所研究的极值曲线 L_2 的邻域内，对于任意 y'，都有 $F_{y'y'}>0$. 然而，并不能断定在弧 L_2 上取得强极值. 因为 $F(x,y,y')=\dfrac{y}{(y')^2}$在 $y'=0$ 处并不连续，自然也不可导. 所以，就不能在 $y'=0$ 处对函数 $F(x,y,y')=\dfrac{y}{(y')^2}$使用泰勒公式，于是(5.7)式也无效. 这就无法判断魏尔斯特拉斯函数的定号性，因而无法肯定 L_2 是否使泛函取得强极小(大). 但是对于 L_2 邻域的斜率 y'与 L_2 的斜率 p 接近的曲线 $y(x)$ 来说，它的斜率 y'不可能取零，这样就可以使用勒让德条件了，即 $F_{y'y'}>0$. 由本节定理 3 知道，在 L_2 上，泛函取得弱极小值，为了否定在 L_2 上取强极值，我们再考察魏尔斯特拉斯函数，其魏尔斯特拉斯函数为

$$\begin{aligned}E(x,y,p,y')&=\frac{y}{(y')^2}-\frac{y}{p^2}+\frac{2y}{p^3}(y'-p)\\&=\frac{y(y'-p)^2(2y'+p)}{(y')^2p^3},\end{aligned}$$

因为 $y>0,(y'-p)^2>0,p^3<0$，但是 $2y'+p$ 对于任意的 y'来说，可以改变符号，故我们由以上小结的(3)可以断定，L_2 不能使泛函取得强极值.

最后，我们略微提一下较为复杂的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\,\mathrm{d}x \tag{5.12}$$

取强极值和弱极值的两个必要条件. (5.12)的被积函数的魏尔斯特拉斯函数为

$$\begin{aligned}E=&F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')-F(x,y_1,\cdots,y_n,p_1,\cdots,p_n)-\\&\sum_{i=1}^{n}(y'_i-p_i)F_{y'}(x,y_1,\cdots,y_n,p_1,\cdots,p_n),\end{aligned}$$

其中 p_i 是极值曲线场的斜率函数，当然还要有一定的要求. 极值曲线 $y_i=Y_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 使泛函(5.12)取得强极值的必要条件即为 $E(x,Y_1,\cdots,Y_n,Y_1',\cdots,Y_n',Y_1'+u_1,\cdots,Y_n'+u_n)\geqslant 0$，这里 $u_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，$x\in[x_0,x_1]$. 泛函(5.12)的二阶变分为

$$\delta^2J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\overline{F}_{y_iy_j}\eta_i\eta_j+\overline{F}_{y_i'y_j}\eta'_i\eta_j+\overline{F}_{y_i'y_j'}\eta'_i\eta'_j\right)\mathrm{d}x,$$

其中$\overline{F}_{y_iy_j},\overline{F}_{y_i'y_j},\overline{F}_{y_i'y_j'}$表示 $F_{y_iy_j},F_{y_i'y_j},F_{y_i'y_j'}$中的 y_i 用 $Y_i(x)$ 代替，y_i'用 $Y_i'(x)$代替. 若 $y_i=Y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 使泛函(5.12)取弱极值，则其一阶变分为零，二阶变

分 $\delta^2 J \geqslant 0$. 由此出发,可以证明：二阶变分不为负的必要条件是,在极值曲线 $y_i = Y_i(x)$ 上的每一点都有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_{y_i' y_j'}\eta'_i\eta'_j \geqslant 0$, 即该二次型是半正定的, 它等价于①

$$F_{y_1'y_1'} \geqslant 0, \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} \geqslant 0, \cdots,$$

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \cdots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_2'y_n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \cdots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{5.13}$$

条件(5.13)称为泛函(5.12)的勒让德条件. 至于泛函(5.12)取极值的充分条件较为复杂,我们在此不再叙述.

习 题 六

1. 写出函数 $F(x,y,y') = y'(1+x^2y')$ 关于 y' 的魏尔斯特拉斯函数,并由此来判断下列变分问题在其极值曲线上取得极值的情况：

(1) $J[y(\cdot)] = \int_1^2 (1+x^2y')y'\mathrm{d}x, y(1) = 3, y(2) = 5$;

(2) $J[y(\cdot)] = \int_{-1}^2 (1+x^2y')y'\mathrm{d}x, y(-1) = 1, y(2) = 4$;

(3) $J[y(\cdot)] = \int_{-1}^2 (1+x^2y')y'\mathrm{d}x, y(-1) = y(2) = 1$.

2. 验证下列变分问题沿极值曲线是否满足勒让德条件,并讨论泛函在极值曲线上取得极值的情况：

(1) $J[y(\cdot)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y)\mathrm{d}x, y(0) = -1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

(2) $J[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2y\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x, y(0) = \frac{1}{3}, y(1) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^2$.

3. 考虑下列变分问题：

i) $J[y(\cdot)] = \int_0^2 (xy' + y'^2)\mathrm{d}x, y(0) = 1, y(2) = 0$;

---

① 参阅参考文献[6]409 页定理 5.

ii) $J[y(\cdot)]=\int_1^2(x^2y'^2+12y^2)\mathrm{d}x, y(1)=1, y(2)=8.$

(1) 求出其极值曲线和单参数的极值曲线族；

(2) 验证沿极值曲线是否成立雅可比条件；

(3) 写出泛函相应于此极值曲线的雅可比方程.

4. 研究下面变分问题的各泛函在其极值曲线上取得极值的情形：

(1) $J[y(\cdot)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2+6y\sin 2x)\mathrm{d}x, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

(2) $J[y(\cdot)]=\int_0^a(y^2+2yy'-16y^2)\mathrm{d}x, a>0, y(0)=y(a)=0$;

(3) $J[y(\cdot)]=\int_{a_1}^{a_2}y'^2(1+y')^2\mathrm{d}x, y(a_1)=b_1, y(a_2)=b_2$;

(4) $J[y(\cdot)]=\int_{a_1}^{a_2}\frac{1+y^2}{(y')^2}\mathrm{d}x, y(a_1)=b_1, y(a_2)=b_2$;

(5) $J[y(\cdot)]=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{y'}, y(0)=0, y(a)=b, a>0, b>0$;

(6) $J[y(\cdot)]=\int_0^a\frac{1}{(y')^2}\mathrm{d}x, y(0)=0, y(a)=b, a>0, b>0.$

*附录　关于转子强度的半解析计算法[①]

一、预备知识

汽轮机的转子，是在高温高压蒸气的作用下高速转动而对外做功，它是火力电厂、远航轮船、化工厂等的动力设备. 因转子通过高速转动而对外做功，所以，就形状而言，转子是以其转轴为轴的空间轴对称体. 我们取转子的轴线为坐标系的 z 轴，采用柱面坐标来研究. 当转子(或叶轮)在高速下转动时，离心力是主要矛盾，故忽略重力的影响，忽略蒸气的轴向推力. 离心力有两部分，转子本身的离心力为体力. 安装在转子上的叶片、垫块等离心力为边界条件. 对于这种情况，我们可以断定，所有应力、应变、位移等都与 θ 无关，只是 r,z 的函数. 在垂直 z 轴的截面里，没有剪应力.

设径向位移为 $u(r,z)$，轴向位移为 $w(r,z)$，$\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z$ 分别表示径向、环向、轴向应变，γ_{rz}表示径向与环向角应变，相应的应力分别用 $\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{rz}$表示. 我们采用位移法，即先求出位移 $u(r,z),w(r,z)$. 当我求得了 $u(r,z),w(r,z)$以后，应用下列公式，很容易计算出应力、应变，用向量表示如下：

位移：$\{\boldsymbol{U}(r,z)\}=\begin{bmatrix}u(r,z)\\w(r,z)\end{bmatrix}$；

应力：$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{rz}]^{\mathrm{T}}$；

应变：$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z,\gamma_{rz}]^{\mathrm{T}}$.

位移与应变的关系：

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\\varepsilon_\theta\\\varepsilon_z\\\gamma_{rz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\\dfrac{u}{r}\\\dfrac{\partial w}{\partial z}\\\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial r}\end{bmatrix},\tag{1}$$

---

① 1976 年我作为西安交大教改小分队成员之一，参观过上海华东好些大工厂，在杭州汽轮机厂待了半年. 本文是我在 1978 年完成的一篇论文.

应力与应变的关系：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -v & -v & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

或

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

简单记作

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \boldsymbol{A}\{\boldsymbol{\varepsilon}\},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}.$$

上述上标 T 表示向量的转置运算，E 是杨氏弹性模量，v 是泊松系数.

二、实心转子的极小化泛函

我们先研究实心转子. 图 1 表示一个转子的轴剖面图，它是一个空间轴对称体，z 轴是它的对称轴. 设 L 是转子的长度，过 $(0,L)$ 中的任一点作垂直 z 轴的截面，截出来的图形是圆，圆的半径是 z 的函数，记作

$$r = \varphi(z) \quad (0 \leqslant z \leqslant L),$$

由叶片、垫块等离心力所形成的径向表面力是外力，与 θ 无关，是 r,z 的函数，记作

$$F = f(r,z) \quad (0 \leqslant z \leqslant L).$$

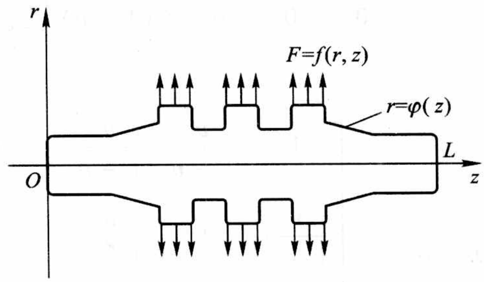


图 1

我们要解决的问题是：当转子以高速匀角速度 ω 转动时，求出转子的应力.

对于一个不受外力作用的实心转盘（等截面），当其以匀角速度 ω 转动时，由材料力学或弹性力学知道径向位移

$$u = -\frac{1-v^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^3}{8} + c_1 r \quad \left(\rho = \frac{\gamma}{g}\right),$$

其中 ρ 是单位体积的质量，c_1 为常数. 对于我们需要研究的问题，认为有类似的关系，不过 c_1 不是一个常数，而是 z 的某个函数. 即转子在体力和表面力 $f(r,z)$ 的作用下，径向位移

$$u = -\frac{1-v^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^3}{8} + c_1(z)r. \tag{4}$$

要求出转子内部各点的应力状况，必须确定 $c_1(z)$，还要求出轴向位移 $w(r,z)$. 为此，我们对这一问题还要作进一步简化. 考虑到角应变 γ_{rz} 很小，即 $\gamma_{rz}\approx 0$. 由(1)式，有

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial z} = -c'_1(z)r.$$

上式两边对 r 积分，有

$$w(r,z) = -\frac{1}{2}c'_1(z)r^2 + A(z), \tag{6}$$

其中 $A(z)$ 是 z 的待定函数.

由几何关系(1)有

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{(1-v^2)}{E}\rho\omega^2\frac{3r^2}{8} + c_1(z), \tag{7}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = -\frac{1-v^2}{E}\rho\omega^2\frac{1}{8}r^2 + c_1(z), \tag{8}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2}c''_1(z)r^2 + A'(z). \tag{9}$$

为了确定 $A'(z)$,我们用应变分量表示应力 σ_z:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_z + v(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)] \\ &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\Big[-\frac{v(1-v^2)}{2E}\rho\omega^2r^2 + 2vc_1(z) - \\ &\quad \frac{1-v}{2}c''_1(z)r^2 + (1-v)A'(z)\Big].\end{aligned} \tag{10}$$

过 z 轴上任一点 $z(0<z<L)$,作垂直于 z 轴的截面 K,其图形是半径为 $\varphi(z)$ 的圆,因为转子转动时,没有受到轴向力作用,则沿轴截面上对 σ_z 积分应等于0,即

$$\iint_K \sigma_z \mathrm{d}K = \int_0^{\varphi(z)} \sigma_z \cdot 2\pi r \mathrm{d}r = 0. \tag{11}$$

将(10)代入(11)有

$$A'(z) = \frac{v(1+v)}{4E}\rho\omega^2[\varphi(z)]^2 - \frac{2v}{1-v}c_1(z) + \frac{1}{4}c''_1(z)\varphi^2(z), \tag{12}$$

代入(9)得

$$\varepsilon_z = \frac{v(1+v)}{4E}\rho\omega^2\varphi^2(z) - \frac{2v}{1-v}c_1(z) + \frac{1}{4}c''_1(z)\varphi^2(z) - \frac{1}{2}c''_1(z)r^2. \tag{13}$$

从(7)、(8)、(13)看出,解决问题的关键是求出 $c_1(z)$. 我们用最小势能原理(即变分原理)来确定函数 $c_1(z)$,为此计算总能量 Π,即变形总能量 U 与外力势能 V 之和,即

$$\Pi = U + V,$$

形变能

$$U = \iiint_\Omega w \mathrm{d}\Omega, \tag{14}$$

其中 Ω 表示转子所占的区域,单位体积的应变能

$$W = \frac{E}{2(1+v)}\left[\frac{1-v}{1-2v}(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)^2 - 2(\varepsilon_r\varepsilon_\theta+\varepsilon_\theta\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_r)\right]. \qquad (15)$$

外力势能是体力(离心力)与表面力 $f(r,z)$ 两部分势能之和,注意到它们的方向都是径向,则

$$V = -\iiint_\Omega \rho\omega^2 ru\mathrm{d}\Omega - \iint_S f(r,z)u\mathrm{d}S,$$

其中 S 是转子的表面积.

$$\Pi = \int_0^L\int_0^{\varphi(z)}\int_0^{2\pi} w\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z - \int_0^L\int_0^{\varphi(z)}\int_0^{2\pi}\rho\omega^2 r^2 u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z -$$

$$\int_0^L \bar{f}(z)u2\pi\varphi(z)\sqrt{1+\varphi'^2(z)}\mathrm{d}z, \qquad (16)$$

其中

$$\bar{f}(z) = \int_0^{\varphi(z)} f(r,z)u\mathrm{d}r.$$

经过复杂的代数计算与积分计算,可得

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L[\eta_1^{(0)}(z)c_1^2(z) + \eta_1^{(1)}(z)c''^2_1(z)]\mathrm{d}z -$$

$$\int_0^L[\zeta_0^{(0)}(z) + \zeta_1^{(0)}(z)c_1(z) + \zeta_1^{(1)}(z)c''_1(z)]\mathrm{d}z, \qquad (17)$$

其中

$$\eta_1^{(0)}(z) = \frac{E}{1-v}\varphi^2(z), \qquad (18)$$

$$\eta_1^{(1)}(z) = \frac{E(1-v)}{96(1+v)(1-2v)}\varphi^6(z), \qquad (19)$$

$$\zeta_1^{(0)}(z) = \frac{1+v}{8}\rho\omega^2\varphi^{(4)}(z) + \rho\omega^2\varphi^3(z)\sqrt{1+\varphi'^2(z)}\bar{f}(z), \qquad (20)$$

$$\zeta_1^{(1)}(z) = -\frac{v(1-v)}{96(1-2v)}\rho\omega^2\varphi^6(z), \qquad (21)$$

而 $\zeta_0^{(0)}(z)$ 是 z 的一个复杂函数,因为它对变分没有贡献,可以从 Π 中去掉,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L[\eta_1^{(0)}(z)c_1^2(z) + \eta_1^{(1)}(z)c''^2_1(z)]\mathrm{d}z -$$

$$\int_0^L[\zeta_1^{(0)}(z)c_1(z) + \zeta_1^{(1)}(z)c''_1(z)]\mathrm{d}z. \qquad (17)'$$

泛函(17)′是 $c_1(z)$ 的二次泛函，由它取极小值的解，就是 $c_1(z)$ 的广义解.

三、实心转子的刚度矩阵、右端列阵

我们用一维有限元来求泛函 Π 的极值函数. 为此，首先将求解问题离散化，把整个转子分成 n 个单元，即 n 段，设分点为 $Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$，有

$$0 = Z_0 < Z_1 < Z_2 < \cdots < Z_n = L,$$

根据积分性质，有

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{i=1}^{n} \int_{Z_{i-1}}^{Z_i} \left\{ \frac{1}{2}[\eta_1^{(0)}(z)c_1^2(z) + \eta_1^{(1)}(z)c''^2_1(z)] - [\zeta_1^{(0)}(z)c_1(z) + \zeta_1^{(1)}(z)c''_1(z)] \right\} dz \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\Delta_i} \left\{ \frac{1}{2}[\eta_1^{(0)}(s)c_1^2(s) + \eta_1^{(1)}(s)c''^2_1(s)] - [\zeta_1^{(0)}(s)c_1(s) + \zeta_1^{(1)}(s)c''_1(s)] \right\} ds \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\Delta_i = Z_i - Z_{i-1}$——第 i 个单元的长.

我们用三次分段多项式来逼近 $c_1(s)$，这样，就取单元两端点的函数值 $c_{1,i-1}^{(0)}, c_{1\,i}^{(0)}$ 及一阶导数值 $c_{1,i-1}^{(1)}, c_{1\,i}^{(1)}$ 作为求解参数. 因而将求函数 $c_1(s)$ 的问题归结为求函数 $c_1(s)$ 的节点值 $c_{1\,i}^{(0)}$ 和它的一阶导数的节点值 $c_{1\,i}^{(1)}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$. 求解参数用向量表示为

$$\{C_1\} = [c_{10}^{(0)}, c_{10}^{(1)}, c_{11}^{(0)}, c_{11}^{(1)}, c_{12}^{(0)}, c_{12}^{(1)}, \cdots, c_{1n}^{(0)}, c_{1n}^{(1)}]^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$

每一个单元有四个求解参数，第 i 个单元的求解参数向量：

$$\{C_1^i\} = [c_{1,i-1}^{(0)}, c_{1,i-1}^{(1)}, c_{1\,i}^{(0)}, c_{1\,i}^{(1)}]^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

取形状函数

$$\{\Phi\} = [\Phi_\ell^{(0)}(s), \Phi_\ell^{(1)}(s), \Phi_r^{(0)}(s), \Phi_r^{(1)}(s)]^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi_\ell^{(0)} &= \frac{1}{4\Delta_i^3}(Z_{i+1} - S)^2(S - Z_i + \Delta_i), \\ \Phi_\ell^{(1)}(s) &= \frac{1}{4\Delta_i^2}(Z_{i+1} - S)^2(S - Z_i),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) = \frac{1}{4\Delta_i^3}(S - Z_i)^2(Z_{i+1} + \Delta_i - S),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s) = \frac{1}{4\Delta_i^2}(S - Z_i)^2(S - Z_{i+1}),$$

在这种情况下，函数 $c_1(s)$ 的插值多项式为

$$\begin{aligned} c_1(s) &= \sum_{i=1}^{n} \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} [c_{1,i-1}^{(0)}\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s) + c_{1,i-1}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s) + c_{1\,i}^{(0)}\boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) + c_{1\,i}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s)]. \end{aligned} \tag{27}$$

我们拿第 i 个单元来具体分析，以便得出单元广义刚度矩阵与广义列阵. 在第 i 个单元里

$$c_1(s) = \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}, \tag{28}$$

$$c''_1(s) = \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}''\}, \tag{29}$$

$$c_1^2(s) = \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\{\boldsymbol{\Phi}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{C}_1^i\} = \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_1^i]\{\boldsymbol{C}_1^i\}, \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{K}_1^i] &= \{\boldsymbol{\Phi}\}\{\boldsymbol{\Phi}\}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s) \end{bmatrix} [\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s), \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s), \boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s), \boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s)] \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_\ell^{(1)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(0)}(s) & \boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s)\boldsymbol{\Phi}_r^{(1)}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

是一个 4 ×4 方阵. 类似地有

$$c''^2_1(s) = \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}''\}\{\boldsymbol{\Phi}''\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{C}_1^i\} = \{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_2^i]\{\boldsymbol{C}_1^i\}, \tag{32}$$

其中

$$[\boldsymbol{K}_2^i]=\begin{bmatrix}\Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s) & \Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\\ \Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s) & \Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\\ \Phi_r^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_r^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s) & \Phi_r^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_r^{(0)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\\ \Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_\ell^{(1)\prime\prime}(s) & \Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(0)\prime\prime}(s) & \Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\Phi_r^{(1)\prime\prime}(s)\end{bmatrix}\tag{33}$$

也是一个 4×4 方阵,将(28)、(29)、(30)、(32)代入(22)的 Π_i,得

$$\Pi_i=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\int_0^{\Delta_i}\eta_1^{(0)}(s)[\boldsymbol{K}_1^i]\mathrm{d}s\{\boldsymbol{C}_1^i\}+\frac{1}{2}\{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\int_0^{\Delta_i}\eta_1^{(1)}(s)[\boldsymbol{K}_2^i]\mathrm{d}s\{\boldsymbol{C}_1^i\}-$$
$$\{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\int_0^{\Delta_i}\zeta_1^{(0)}(s)\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}s-\{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\int_0^{\Delta_i}\zeta_1^{(1)}(s)\{\boldsymbol{\Phi}''\}\mathrm{d}s,$$

$$\Pi_i=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}^i]\{\boldsymbol{C}_1^i\}-\{\boldsymbol{C}_1^i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}^i\},\tag{34}$$

其中

$$[\boldsymbol{K}^i]=\int_0^{\Delta_i}\eta_1^{(0)}(s)[\boldsymbol{K}_1^i]\mathrm{d}s+\int_0^{\Delta_i}\eta_1^{(1)}(s)[\boldsymbol{K}_2^i]\mathrm{d}s,\tag{35}$$

$[\boldsymbol{K}^i]$——广义单元刚度矩阵,

$$[\boldsymbol{f}^i]=\int_0^{\Delta_i}[\zeta_1^{(0)}(s)\{\boldsymbol{\Phi}\}+\zeta_1^{(1)}(s)\{\boldsymbol{\Phi}''\}]\mathrm{d}s,\quad i=1,2,\cdots,2(n+1),\tag{36}$$

$[\boldsymbol{f}^i]$——广义单元节点列阵.

总的刚度矩阵$[\boldsymbol{K}]$由单元刚度矩阵叠加而成,

$$[\boldsymbol{K}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^1 & & & & \\ & \boldsymbol{K}^2 & & & \\ & & \boldsymbol{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{K}^n\end{bmatrix}$$

是一个对称的 $2(n+1)\times2(n+1)$ 矩阵,是个分块矩阵,它的半带宽为 4,$\boldsymbol{f}$ 是由广义单元节点力列向量叠加而成,它是一个 $2(n+1)$ 维列向量. 由此,我们得到求解参数$\{\boldsymbol{C}_1\}$满足的有限元方程(即极小化方程)

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{C}_1\}=\{\boldsymbol{f}\}$$

——$2(n+1)$元线性方程组,解这个方程组求出$\{\boldsymbol{C}_1\}$,利用(27)式就可求出

$c_1(z)$，计算出 $c_1''(z)$. 代入(7)、(8)、(9)式计算出 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$，再由(3)算出 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$，这样就求得了实心转子的应力、应变.

四、结束语

汽轮机转子也有空心转子. 一个沿 z 轴开有内孔的空心转子，设 L 为转子的长，它的内外表面是分别由

$$\begin{aligned} r &= \psi(z), \\ r &= \varphi(z), \end{aligned} \quad 0 \leqslant z \leqslant L$$

旋转而成的旋转曲面，叶片、垫块等产生的表面力仍记作函数

$$F = f(r,z) \quad (0 \leqslant z \leqslant L).$$

空心转子的强度、极小化泛函与有限元方程组与前述类同，一个不受外力作用沿轴线开有内孔的转盘，由高速匀速转动而产生的径向位移是

$$u = -\frac{1-v^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^3}{8} + c_1 r + \frac{c_2}{r},$$

其中 c_1, c_2 为常数.

对于空心转子，由高速匀角速度 ω 转动而产生的径向位移同样用常数变易法，c_1, c_2 不是常数，而是 z 的函数，即转子在高速旋转下的径向位移是

$$u(r,z) = -\frac{1-v^2}{E}\rho\omega^2 + c_1(z)r + c_2(z)\frac{1}{r}.$$

与实心转子类同，可以同样用最小势能原理与有限单元法来求解.

部分习题答案

习题一

1. $\|y\| = \left\{\int_0^2 (x - x^2)(x - x^2)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{15}} = \dfrac{4}{15}\sqrt{15}$

或

$\|y\| = \max\limits_{x\in[0,2]} |x - x^2| = 2.$

2. $\|x - y\| = \left\{\int_0^{2\pi} (\sin t - \cos t)^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$

或

$\|x - y\| = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} |\sin t - \cos t| = \sqrt{2}$.

5. (1) $\sqrt{2}$; (2) sh 1.

7. (1) 设 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$，由条件 $y(0) = 0$ 推出 $c = 0$，再由 $y'(1) = 0$，即 $2a + b = 0, b = -2a$，故 $y = ax^2 - 2ax$（a 为不等于零的实数），$x \in [0,1]$；

(2) $I[y(\cdot)] = \int_0^1 [x^2 4a^2(x-1)^2 + xa^2(x^2 - 2x)^2 + 2xa(x^2 - 2x)]\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{5}{6}a,$

令 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = a - \dfrac{5}{6} = 0$，得 $a = \dfrac{5}{6}$，因为 $\dfrac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}a^2} = 1 > 0$，故 $a = \dfrac{5}{6}$ 使泛函取得极小值，对 $a \in (-\infty, \infty)$ 只有唯一的极小点 $a = \dfrac{5}{6}$，故它也就是最小点.

习题二

2. $y = -\dfrac{4}{x} + 7.$

3. $y = x^2 + 2x + 1.$

4. (1) $y=\sin x$; (2) $y=-x^3+2x$;

(3) $y=-\frac{x^2}{4}+1$; (4) $y=8-\frac{6}{x}$;

(5) $y=\frac{1}{8}(\sin 2x+\cos 2x-1)$; (6) $y=c_1\sin(4x+c_2)$.

5. $vy''+(1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial y}-(1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0.$

6. $(x-3)^2+y^2=10.$

8. (1) 泛函的值与选取的函数无关;

(2) 泛函的值与选取的函数无关;

(3) 无解.

9. (1) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$;

(2) $y=\mathrm{sh}(c_1x+c_2)$.

10. (1) $y=c_1x+c_2, z=c_3x+c_4$;

(2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$;

(3) $y=\frac{x^7}{7}+c_1x^5+c_2x^4+c_3x^3+c_4x^2+c_5x+c_6$;

(4) $y=(c_1x+c_2)\cos x+(c_3x+c_4)\sin x$, $z=2y+y''$;

(5) $y=(c_1x+c_2)^{\frac{2k-1}{k-1}}+c_3x+c_4\left(k\neq 1, k\neq\frac{1}{2}\right)$,

当 $k=\frac{1}{2}$ 时, $y=\ln(c_1x+c_2)+c_3x+c_4$;

当 $k=1$ 时,泛函的值与 y 无关.

11. $y=-x^2+x^3$.

12. (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

(2) $\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)-cu=f.$

13. 变为极坐标的泛函为

$$I[r(\cdot)]=\int_{\theta_0}^{\theta_1} r\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta,$$

它的欧拉方程是 $\frac{r^3}{\sqrt{r^2+r'^2}}=\alpha$,极值曲线为 $r^2\cos(2\theta-\beta)=\alpha$,或者还可以写为

$$x^2\cos\beta+2xy\sin\beta-y^2\cos\beta=\alpha,$$

这里 α,β 为常数.

习题三

1. $(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2$,常数 c_1,c_2 和 λ 由条件 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 和 $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=L$ 来确定.

2. $y=\pm 2\sin k\pi x$,其中 k 为整数.

3. $r=c_1$——圆.

4. $\theta=c_1+c_2z,r=R$,其中常数 c_1,c_2 由边界条件确定.

5. $x\cos\beta-y\sin\beta-z\tan\alpha=0,\alpha,\beta$ 为常数.

6. $y=\lambda x^2+c_1x+c_2$,其中常数 c_1,c_2 及 λ 由边界条件和等周条件来确定.

7. $\begin{cases}y=-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x,\\ z=x,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=3x^2-2x,\\ z=x.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x=a\sin\dfrac{\pi t}{T},\\ y=b\sin\dfrac{\pi t}{T},\\ z=\cos\dfrac{\pi t}{T},\end{cases}$ 其中 $a^2+b^2=1$.

10. $y=\dfrac{1}{2}(1-\cos x)+\dfrac{1}{4}(2-\pi)\sin x$.

11. $y=B_k\sin kx,k=1,2,\cdots$.

12. (1) $y=\dfrac{\operatorname{sh}(1-x)-2\operatorname{ch}(1-x)}{\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1}$;

(2) $y=\dfrac{4\operatorname{ch}x+2\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}1}$;

(3) $y=0$.

13. $x=\dfrac{1}{\pi}(\theta-\sin\theta),y=\dfrac{1}{\pi}(1-\cos\theta)$.

14. $\delta J=\int_0^1[3y^2y'^2-2(y^3y')']\alpha\eta(x)\,dx+2y^3(1)y'(1)\alpha\eta(1)$.

15. 设 $A(x_1,y_1)\neq 0$,则 $\dfrac{\varphi'-y'}{1+\varphi'y'}=1$,几何上表示极值曲线与边界点在其上滑动的曲线 $y_1=\varphi_1(x)$ 相交,且交角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

习题四

1. $\left(y-\frac{17}{6}\right)^2+(1+x)^2=\frac{325}{36}$.

2. $y=\frac{(x-c_1)^2}{c_1^2}+\frac{1}{4}c_2^2$.

5. 提示：设 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 分别是 m_1 和 m_2 离各自平衡位置的位移，则系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2,$$

动能为 $T=\frac{1}{2}m_1x_1^2+\frac{1}{2}m_2x_2^2$.

7. 提示：势能由两部分组成，即重力势能 $mg(1-\cos\theta)$ 和弹性势能 kx^2，故势能为 $V=mg(1-\cos\theta)+kx^2$.

我们为了求得动能，先求出质点 m 的水平速度与垂直速度，水平速度为 $v_x=\dot{x}+L\dot{\theta}\cos\theta$，垂直速度为 $v_y=L\dot{\theta}\sin\theta$，故动能为 $T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta+L^2\dot{\theta}^2)$，质点的运动方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0,\\ m\ddot{x}+m\ddot{\theta}L\cos\theta-m\dot{\theta}^2L\sin\theta+2kx=0,\end{cases}$$

固有频率为 $\omega^2=2kg/(mg+2kL)$.

10. $I[y(\cdot)]=\int_a^b(x^2y'^2+xy^2+2xy)\mathrm{d}x=\min$,

$y(a)=y_1, y(b)=y_2$.

11. 在条件 $\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=a$ 下，求泛函

$$J[y(\cdot)]=\int_0^1 y'^2\mathrm{d}x, y(0)=y(1)=0$$

的极值问题.

习题五

1. 取一级近似解的形式为

$$u_1 = \alpha(x^2 - a^2)(y^2 - a^2),$$

其中 $\alpha = \dfrac{5}{16a^2}$,取二级近似解的形式为

$$u_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[c_1 + c_{21}x^2 + c_{22}y^2].$$

2. 提示:取 n 级近似解的形式为

$$y_n = (x-1)^2(c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}),$$

令 $n=2$,求得二级近似解为

$$y_2 = (x-1)^2(0.124 + 0.218x).$$

3. $z = 0.811\,0(x-1)(2-x)$.

4. 提示:它等价于泛函

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2 \mathrm{d}x, \quad y(0) = y(1) = 0$$

在满足条件

$$\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = 1$$

下的极值问题,即所谓条件变分问题. 原特征值问题的最小特征值为

$$\lambda = \frac{\int_0^1 y'^2 \mathrm{d}x}{\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x}, \tag{*}$$

令 $y_2 = x(1-x)(A_1 + A_2x)$,代入(*)可得

$$\lambda = \frac{168A_1^2 + 126A_1A_2 - 35A_2^2}{16A_1^2 + 11A_1A_2 + 2A_2^2},$$

令 $\dfrac{A_1}{A_2} = B$,代入上式得

$$\lambda = \frac{168B^2 + 126B - 35}{16B^2 + 11B + 2},$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}B} = 0$ 得出 $B = 11.011\,02, -0.344\,352\,1$(舍去). 故最小特征值的近似值是

$$\lambda = 10.528\,9,$$

特征函数的近似值是

$$y_2 = A_2(11.011\,02x + x^2 - 12.011\,02x^3),$$

精确的最小特征值和对应的特征函数分别为 $\lambda=\pi^2$ 和 $y=B\sin\pi x$.

5. 如果坐标函数取得与 1 题一样,则答案同 1.

6. 提示:我们把解取成多项式的形式,由于对称性,显然解应是 y 的奇函数和 x 的偶函数,因此它的形式为

$$u_n(x,y)=A_1+A_2y+A_3x^2+A_4y^3+A_5x^2y+A_6x^4+$$

$$A_7x^4y+A_8x^2y^3+A_9y^5+\cdots.$$

要求 u_n 满足边界条件,即

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|_{x=\pm a}=\pm(A_32a+A_52ay+A_64a^3+A_74a^3y+A_82ay^3+\cdots)=0,$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|_{y=\pm b}=\pm(A_2+A_43b^2+A_5x^2+A_7x^4+A_8x^23b^2+A_95b^4+\cdots)=0.$$

由 x 与 y 的不同幂次的系数等于零,我们得到

$$A_5=A_7=A_8=0,$$

$$A_3=-2a^2A_6,$$

$$A_2=-3b^2A_4-5b^4A_9,$$

故可取近似解

$$\bar{u}=A_1+A_6(x^4-2a^2x^2)+A_4(y^3-3b^2y)+A_9(y^5-5b^4y),$$

即取坐标函数 $\varphi_1=x^4-2a^2x^2,\varphi_2=y^3-3b^2y,\varphi_3=y^5-5b^2y$,然后用伽辽金方法求得

$$A_6=A_9=0,\quad A_4=\frac{1}{6},$$

近似解为

$$\bar{u}=A_1+\frac{1}{6}(y^3-3b^2y).$$

7. 设 $y_3(x)=(1-x^2)(a_1+a_2x^2)$,由

$$\int_{-1}^{1}L(y_3(x))(1-x^2)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-1}^{1}L(y_3(x))(1-x^2)x^2\mathrm{d}x=0,$$

推得确定 k 的方程为

$$\begin{cases}(35-14k^2)a_1+(7-2k^2)a_2=0,\\(21-6k^2)a_1+(33-2k^2)a_2=0,\end{cases}\qquad (*)$$

要 a_1,a_2 有非零解，则必有

$$k^4-28k^2+63=0,$$

解得特征值

$$k_1^2=2.467\,44,\quad k_2^2=25.6,$$

由（*）解得

$$a_1=\frac{7-2k^2}{14k^2-35}a_2\bigg|_{k^2=2.467\,44}=-4.530\,36a_2,$$

$$y_{31}=(1-x^2)(-4.530\,36+x)a_2,$$

$$a_1=\frac{7-2k^2}{14k^2-35}a_2\bigg|_{k^2=25.6}=-0.136\,67a_2,$$

$$y_{32}=(1-x^2)(-0.136\,67+x)a_2.$$

8. 提示：取 $u_1(x,y)=\left[y^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2\right]f_1(x)$，待定函数 $f_1(x)$ 满足常微分方程

$$x^2f_1''+5xf_1'-5f_1=\frac{15}{4},$$

解出 $f_1(x)$，得到

$$u_1=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}x^2\right).$$

习题六

1. $E(x,y,p,y')=x^2(p-y')^2\geqslant 0$.

(1) 其极值曲线为 $y=7-\frac{4}{x}(1\leqslant x\leqslant 2)$，在此曲线上，泛函取得强极小值；

(2) 欧拉方程的解为 $y=\frac{12}{5x}+\frac{17}{5}(-1\leqslant x\leqslant 2)$,在 $x=0$ 处,此函数不连续,所以,泛函在按段连续的曲线类中,不能取得极值;

(3) 欧拉方程的解为 $y=1(-1\leqslant x\leqslant 2)$,在此直线上泛函取得强极小值.

2. (1) $F_{y'y'}=-2<0$,极值曲线为 $y=\sin 2x-1\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$,在此曲线上,泛函取得强极大值;

(2) $F_{y'y'}=2>0$,极值曲线为 $y=\frac{1}{3}e^{2x}(0\leqslant x\leqslant 1)$,在此曲线上,泛函取得强极大值.

3. 对于 i),(1) 极值曲线为 $y=-\frac{1}{4}x^2+1(0\leqslant x\leqslant 2)$,极值曲线族为 $y=-\frac{1}{4}x^2+cx+1$;

(2) 在极值曲线 $y=-\frac{1}{4}x^2+1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的弧段上雅可比强条件成立;

(3) 泛函相应于此极值曲线的雅可比方程为 $\eta''=0$.

对于 ii),(1) 极值曲线为 $y=x^3(1\leqslant x\leqslant 2)$,极值曲线族为 $y=x^3+c\left(x^3-\frac{1}{x^4}\right)$;

(2) 在极值曲线 $y=x^3(1\leqslant x\leqslant 2)$ 上,雅可比强条件成立;

(3) 泛函相应于此极值曲线的雅可比方程为 $x^2\eta''+2x\eta'-12\eta=0$.

4. (1) 泛函在 $y=\sin 2x$ 上,取得强极大值.

(2) 若 $0<a<\frac{\pi}{4}$,则泛函在 $y=0$ 上取得强极小值;若 $a>\frac{\pi}{4}$,则没有极小值.

(3) 极值曲线为 $y=mx+n\ (a_1\leqslant x\leqslant a_2)$,其中

$$m=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1},\quad n=\frac{b_1a_2-b_2a_1}{a_2-a_1}.$$

当 $-1<m<0$ 时,泛函不能取得极值;

当 $m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant 0$ 时,泛函取得强极小值;

当 $\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<m<\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 时,泛函取得弱极大值;

当 $m<\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 或 $m>\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 时,泛函取得弱极小值;

当 $m=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 或 $m=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 时,我们的充分条件不能应用.

(4) 泛函在极值曲线 $y=\operatorname{sh}(c_1x+c_2)$ 上取得弱极小值,其中 c_1 和 c_2 由

$$b_1=\operatorname{sh}(c_1a_1+c_2),\quad b_2=\operatorname{sh}(c_1a_2+c_2)$$

确定.

(5) 泛函在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上取得弱极小值.

(6) 泛函在直线 $y=x$ 上取得弱极小值.

参考文献

[1] ГЕЛЪФАИД И М, ФОМЦИ С В . ВАРЦАЦЧОИИОЕ ЦСЧЦСЛЕИЦЕ,1961.

[2] A. D. 亚历山大洛夫,等. 数学: 它的内容,方法和意义. 第二卷. 北京: 科学出版社,2001.

[3] 钱伟长. 变分法及有限元(上册). 北京: 科学出版社,1980.

[4] 加藤敏夫. 变分法及其应用. 上海: 上海科学技术出版社,1961.

[5] 冯康. 有限元方法. 数学的实践与认识,1974(4): 56 - 63,1975(1): 44 - 56,1975(2):53 - 75.

[6] 丘维声. 高等代数学习指导书(上册). 北京: 清华大学出版社,2005.

[7] Soong T C. The Dynamics of jovelin throw. Journal of applied mechanics, Vol. 42. TRANS.

[8] 欧斐君. 一类隐泛函取得极值的必要条件. 工程数学学报,1986(2).

[9] Ou F J. The Optimization of Javelin throw. Optimization techniqves and applications, ICOFA'95. VOLUME 2. World Scientific.

ISBN 978-7-04-036556-6
9 787040 365566 >
定价 22.60元

[General Information]
书名=变分法及其应用 物理、力学、工程中的经典建模
页数=198
SS号=13205387